段考複習錦囊

國二上　數學

第三次段考

重點回顧

- 一元二次方程式的意義
- 提公因式法求解
- 平方公式
- 十字交乘法求解
- 開平方根解方程式
- 配方法
- 配方法解方程式
- 一元二次方程式根的公式
- 一元二次方程式根的性質
- 根與係數的關係
- 已知兩根求作方程式

一分鐘準備段考

- 清楚定義，能自己推導公式
- 動手做題目，然後修正錯誤
- 多做題目，培養對題型的解題感覺
- 利用名師學院系列產品，反覆觀看、補強弱點

一元二次方程式的意義

1. 意義
   當方程式經化簡後只含有一種未知數，而且此未知數的最高次數為二次時，則這類方程式稱為一元二次方程式。
   例　$x^2-3x+10=0$ 、 $3x^2+5=0$ 、 $5x^2=0$ 、 $(x+1)(3x-5)=0$ 、 $6x-7x^2=0$
   都是一元二次方程式
2. 方程式的解（根）
   將方程式的未知數用一數值代入後，若使得方程式等號成立，則此數就稱為方程式的解。

提公因式法求解

利用提出公因式的方法，將方程式分解成$a\times b=0$，則可由$a=0$或$b=0$（a、b至少有一個是0）來解出方程式的根。

$\boxed{例}$ $x^2+2x=0$提出公因式$x\Rightarrow x(x+2)=0$

則$x=0$或$x+2=0\Rightarrow x=0$或$x=-2$

$\therefore 0$、-2即為$x^2+2x=0$的解（根）

平方公式

觀念 1 和的平方公式求解

和的平方公式：$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$

$\boxed{例}$ $x^2+10x+25=0$

$\Rightarrow x^2+2\cdot x\cdot 5+5^2=0$

$\Rightarrow (x+5)^2=0$

$\Rightarrow x=-5$（重根）

觀念 2 差的平方公式求解

差的平方公式：$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$

$\boxed{例}$ $x^2-12x+36=0$

$\Rightarrow x^2-2\cdot x\cdot 6+6^2=0$

$\Rightarrow (x-6)^2=0$

$\Rightarrow x=6$（重根）

觀念 3 平方差公式求解

平方差公式：$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$

$\boxed{例}$ $9x^2-4=0$

$\Rightarrow (3x)^2-2^2=0$

$\Rightarrow (3x+2)(3x-2)=0$

$\Rightarrow (3x+2)=0$或$(3x-2)=0$

$\Rightarrow x=-\frac{2}{3}$或$\frac{2}{3}$

十字交乘法求解

分解方法（二次項係數等於 1 時）

設方程式為$x^2+Px+Q=0$

步驟 1：將常數項Q分解成兩整數a、b之乘積，即$Q=a\times b$。

步驟 2：使分解後的兩數a、b之和等於x的係數P，即$a+b=P$。

由上兩個步驟可得 $x^2+Px+Q=0$

$$\Rightarrow x^2+(a+b)x+a\times b=0$$
$$\Rightarrow (x+a)(x+b)=0$$
$$\Rightarrow x=a \text{ 或 } x=b$$

$\boxed{例}$ $-3x^2+10x+1=-2x+10$

$$\begin{array}{ccc} x & \times & -3 \\ x & & -1 \\ \hline & -4x & \end{array}$$

$\Rightarrow -3x^2+12x-9=0$

$\Rightarrow x^2-4x+3=0$（左右同除以 -3）

$\Rightarrow (x-3)(x-1)=0$

$\Rightarrow x=3$ 或 1

開平方根解方程式

1. x 項係數是 1

   將 $(x+p)^2=q$ 左右開平方

   $\Rightarrow x+p=\pm\sqrt{q} \Rightarrow x=-p\pm\sqrt{q}$

   $\boxed{例}$ $(x+3)^2=5$

   $\Rightarrow x+3=\pm\sqrt{5}$

   $\Rightarrow x=-3\pm\sqrt{5}$

2. x 項係數不是 1

   將 $(ax+b)^2=k$ 左右開平方

   $\Rightarrow ax+b=\pm\sqrt{k} \Rightarrow ax=-b\pm\sqrt{k} \Rightarrow x=\dfrac{-b\pm\sqrt{k}}{a}$

   $\boxed{例}$ $(3x-1)^2=8$

   $\Rightarrow 3x-1=\pm\sqrt{8}$

   $\Rightarrow 3x=1\pm\sqrt{8}$

   $\Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{8}}{3}$

配方法

1. 原理

   利用平方公式將一元二次方程式配成完全平方式 $x^2+2bx+b^2=(x+b)^2$ 或 $x^2-2bx+b^2=(x-b)^2$

2. 方法

   將 $x^2+mx\ (m\neq 0)$ 此類的多項式加上 $(\dfrac{m}{2})^2$ 後，配成完全平方式 $(x+\dfrac{m}{2})^2$，即

   $x^2+mx+(\dfrac{m}{2})^2=x^2+2\cdot(\dfrac{m}{2})\cdot x+(\dfrac{m}{2})^2=(x+\dfrac{m}{2})^2$。

例 將 x^2+6x 配成完全平方式，應加上 3^2，即為 $x^2+6x+9=(x+3)^2$
口訣：加上前面係數一半的平方

配方法解方程式

將方程式中二次項與一次項的部分配成完全平方式，再利用解平方根的概念求方程式的解。

1. 使用時機
   無法使用十字交乘法求解，或常數項很大時，可利用配方法解方程式。
2. 使用步驟
   設 $a\neq 0$，用配方法解方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的步驟如下：
   (1) 將常數項移到等號的右邊 ⋯⋯⋯⋯ $ax^2+bx+c=0 \Rightarrow ax^2+bx=-c$
   (2) 將 x^2 項係數變為 1 ⋯⋯⋯⋯ $\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$
   (3) 左右加上 (x 項係數的 $\frac{1}{2}$ $)^2$ ⋯⋯⋯⋯ $\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2=-\frac{c}{a}+(\frac{b}{2a})^2$
   (4) 左邊寫成完全平方式，右邊整理 ⋯ $\Rightarrow (x+\frac{b}{2a})^2=-\frac{4ac}{4a^2}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$
   (5) 左右開平方（右邊記得寫±）⋯⋯⋯ $\Rightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$
   (6) 移項 ⋯⋯⋯⋯ $\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

一元二次方程式根的公式

利用配方法解 x 的一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$：

$ax^2+bx+c=0$，其中 $a\neq 0$

$$\Rightarrow ax^2+bx=-c$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2=-\frac{c}{a}+(\frac{b}{2a})^2$$

$$\Rightarrow (x+\frac{b}{2a})^2=-\frac{4ac}{4a^2}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\Rightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

可得 x 的一元二次方程式的公式為 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，其中 a 為二次項係數，b 為一次項係數，c 為常數項。

一元二次方程式根的性質

一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之兩根為 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，其中，根號中的 b^2-4ac 可決定此解是否合理，故 b^2-4ac 稱為判別式。判別方式如下：

1. 若 $b^2-4ac>0$

   則此方程式有兩相異實根，即 $x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$、$\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。
2. 若 $b^2-4ac=0$

   則方程式有兩相等實根，即 $x=\dfrac{-b}{2a}$、$\dfrac{-b}{2a}$。
3. 若 $b^2-4ac<0$

   則此方程式沒有實根（即為無解）。

綜合 1、2 可知，若 $b^2-4ac\ge 0$，則此方程式有實根。

根與係數的關係

若 α、β 為一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根，則：

1. 兩根之和 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$
2. 兩根之積 $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

已知兩根求作方程式

【型一】將配方法步驟逆推回來（左右平方），即可由方程式的無理根求得原方程式。

例 已知 $ax^2+bx+c=0$ 之兩根為 $x=2\pm\sqrt{3}$，求 b、$c=$？

解 $x=2\pm\sqrt{3}\Rightarrow x-2=\pm\sqrt{3}\Rightarrow(x-2)^2=(\pm\sqrt{3})^2$

$\Rightarrow x^2-4x+4=3\Rightarrow x^2-4x+1=0$

$\therefore b=-4$，$c=1$

說明：方程式的解若是無理數，就稱之為無理根。

【型二】若已知 α、β 為一元二次方程式的兩根，則可列方程式為 $(x-\alpha)(x-\beta)=0$，即 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$。

例 若 2、3 為方程式的兩根，則此方程式為 $(x-2)(x-3)=0$，
即 $x^2-(2+3)x+2\times 3=0 \Rightarrow x^2-5x+6=0$

實力測驗 GO：http://quiz.kut.com.tw/j_exam.aspx