段考錦囊

年級：高中二年級

範圍：下學期第二次段考

科目：數學

重點整理

一、一分鐘準備段考

- 基本定義和題型要「熟」，不是只要「會」
- 解出一題難題勝過解十題簡單的題目，不要逃避不會的題目
- 多做題目，培養對題型的解題感覺
- 利用名師學院系列產品，反覆觀看、補強弱點

二、重點回顧

- 矩陣

一、矩陣的定義

1. 將一些數排列成矩形的陣列，稱為「矩陣」。
2. 矩陣中同一水平線的各元稱為「列」；矩陣中同一鉛直線的各元稱為「行」。
3. 一個有 m 列、n 行的矩陣，稱為「$m\times n$ 階矩陣」；若 $m=n$，則又稱為「方陣」。
4. 「a_{ij}」代表矩陣中第 i 列，第 j 行的元。
5. 將方程組的各項未知數係數列出排成的矩陣，稱為「係數矩陣」。
6. 將方程組的「係數矩陣」再增設一行常數後，稱為「增廣矩陣」。

二、矩陣的列運算

1. 將矩陣某列的每一元同乘以一個不為零的數。
2. 將矩陣某列的每一元同乘以不為零的數後，再加至另一列的對應元。
3. 將矩陣的某兩列互換位置。

三、轉置矩陣

設矩陣 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{ij}]_{n\times m}$，若 $a_{ij}=b_{ji}$，$1\le i\le m$，$1\le j\le n$，則稱 B 為 A 的轉置矩陣,以 A^T 表之，即 $B=A^T$。

四、矩陣加法的性質

1. $A+B=B+A$ （交換律）

2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ （結合律）
3. $A+O=O+A=A$ （加法單位元素）
4. $A+(-A)=O$ （加法反元素）

五、矩陣係數積的性質

1. $(-1)A=-A$
2. $0 \cdot A=O$
3. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
4. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$
5. $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$

六、轉置矩陣的性質

1. $(A^T)^T=A$
2. $(A+B)^T=A^T+B^T$
3. $(A-B)^T=A^T-B^T$

七、對稱矩陣

當矩陣 A 符合 $A^T=A$ 與 $a_{ij}=a_{ji}$ （對於所有的 $1\le i$, $j\le n$），則稱矩陣 A 為對稱矩陣。

八、反對稱矩陣

當矩陣 A 符合 $A^T=-A$ 與 $a_{ij}=-a_{ji}$ （對於所有的 $1\le i$, $j\le n$），則稱矩陣 A 為反對稱矩陣。

九、對稱矩陣與反對稱矩陣的異同

1. 皆為方陣。
2. 對稱矩陣的主對角線各元無限制；而反對稱矩陣的主對角線各元必為 0 。

十、單位矩陣的性質

1. $A_{m\times n}\times I_n = A_{m\times n}$

2. $I_m \times A_{m\times n} = A_{m\times n}$

3. $A_{n\times n}\times I_n = I_n \times A_{n\times n} = A_{n\times n}$

十一、 矩陣的乘法性質

1. AB $\neq$ BA
2. A(BC) = (AB)C = ABC
3. A(B + C) = AB + AC
4. (A + B)C = AC + BC
5. 若 A^n 存在，則 A 為方陣
6. $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$
7. $(I+B)^2 = I^2 + IB + BI + B^2 = I + 2B + B^2$
8. $(A+B)^n$ 無二項式定理
9. $(I+B)^n = I + C_1^n B + C_2^n B^2 + \cdots + C_n^n B^n$
10. (rA)B = r(AB) , (rA)(sB) = (rs)(AB)

十二、 二項式定理的應用

A、B 皆為 n 階方陣, I 為 n 階單位方陣
$(I+A)^n = I + C_1^n A + C_2^n A^2 + \cdots + C_n^n A^n$

十三、 若 A 為一個轉移矩陣

若 A 為一個轉移矩陣, X_k 為由 X_0 開始的第 k 次機率矩陣, 則：

1. A 中每一個元素為非負。
2. A 中每一行元素和為 1。
3. *A^k 亦為轉移矩陣。*
4. 若 k 趨於無限大，X_k 會趨於一個穩定態 X, 則 $AX = X$ 。

十四、 反方陣與可逆方陣

1. 設矩陣 A 為 n 階方陣，若矩陣 B 滿足 $AB = BA = I_n$，則稱 B 為 A 的乘法反元素或反方陣，記為 $B = A^{-1}$。
2. 具有反方陣的矩陣稱為可逆方陣。

十五、 可逆方陣的性質與公式

1. A 的反方陣必唯一。
2. A 的行列式 $\det(A) \neq 0$
3. $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
5. $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
6. $(AB)^T = B^T A^T$
7. $(ABC)^T = C^T B^T A^T$

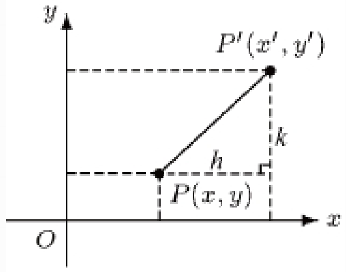
十六、 方陣與聯立方程組

設 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 為可逆方陣，則聯立方程組

$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ 的解 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

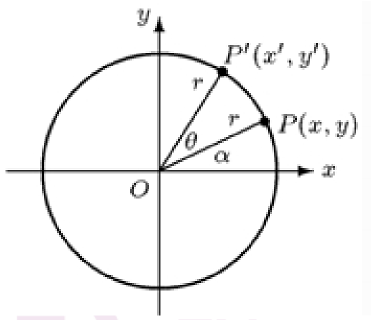
十七、 矩陣與平移變換

1. 將坐標平面上的點 P，沿 x 軸平移 h，沿 y 軸平移 k，得新的坐標為 $P'(x', y')$，則 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$。
2. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 亦稱為行坐標。



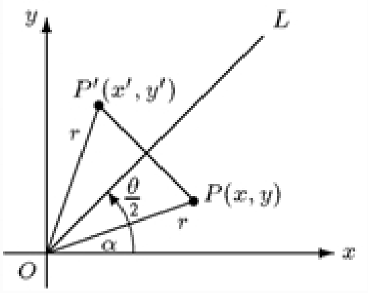
十八、 矩陣與旋轉變換

1. 將坐標平面上的點 $P(x, y)$，繞原點逆時針旋轉 θ，得新的點坐標為 $P'(x', y')$，則
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}。$$
2. $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 為旋轉矩陣。



十九、 矩陣與鏡射變換

1. 將坐標平面上的點 $P(x, y)$，對 L（通過原點且斜角為 $\frac{\theta}{2}$）鏡射後，得新的坐標為 $P'(x', y')$，則
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}。$$
2. $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ 為鏡射矩陣。



二十、 矩陣與伸縮變換

將坐標平面上的點 $P(x, y)$，以原點為中心，伸縮 k 倍 $(k>0)$，得新坐標為 $P'(x', y')$，則 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

二十一、矩陣與推移變換

1. 將坐標平面上的點 $P(x, y)$，沿 x 軸推移 y 坐標的 k 倍，得新坐標為 $P'(x',y')$，則

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2. 將坐標平面上的點 $P(x, y)$，沿 y 軸推移 x 坐標的 k 倍，得新坐標為 $P'(x',y')$，則

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

二十二、平面變換的性質

1. 有五種平移、旋轉、鏡射、伸縮與推移五種。
2. 其中以原點為中心的旋轉、伸縮、推移與過原點的直線為鏡射軸的鏡射均屬線性變換。
3. 平移、旋轉、鏡射等變換又稱為剛體變換，其特性為形狀、大小、角度與面積均不改變。

精選試卷及詳解

考試日期僅供參考

高二數學下矩陣段考

範圍：	矩陣	考試日期：	2014/03/19
適用年級：	高中二年級	適用科目：	數學
題型：	單選題：15題　多選題：5題		

一、單選題

1.(　)

一線性變換T將三點$P(2,-1)$、$Q(-1,1)$及$R(10,-7)$變換至$P'(2,4)$、$Q'(1,1)$及R'，則R'之坐標爲何？

(A) $(-\frac{5}{3},\frac{8}{3})$　(B) $(2,8)$　(C) $(-10,-1)$　(D) $(-\frac{10}{3},-\frac{1}{3})$

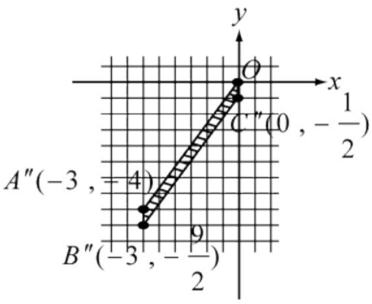
2.(　)

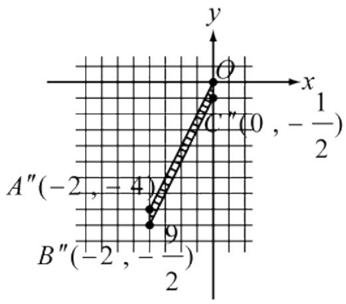
設二階方陣$A=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$所表示的線性變換，將直線$L:2x+y=4$變換至$L'$，其中$L$與$L'$之交點爲$P$，則$P$點坐標爲何？

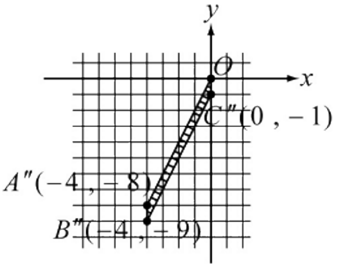
(A) $(0,4)$　(B) $(0,-4)$　(C) $(-4,0)$　(D) $(4,0)$

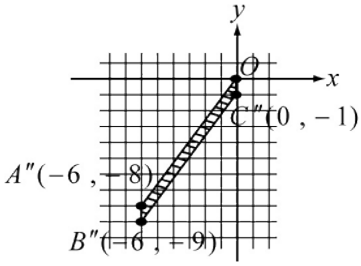
3.(　)

已知變換N的矩陣表示爲$\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$，求圖(三)爲何？

(A)


(B)


(C)


(D)


4.(　)

請問變換M 的矩陣表示爲多少？

(A) $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

5.( )

若四邊形$OABC$ 映成四邊形$OA''B''C''$ 的線性變換可用矩陣A表示。已知ΔPQR 的面積爲 2，經過矩陣A所表示的線性變換後的圖形爲$\Delta P'Q'R'$，則$\Delta P'Q'R'$ 的面積爲何？

(A) 4 (B) 1 (C) 6 (D) 2

6.( )

設矩陣$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$爲一可逆矩陣，且其行列式值$\det(A)=\left|\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}\right|=3$，試問$\det(A-A^{-1})$值爲多少？

(A) 16 (B) $\frac{16}{9}$ (C) 4 (D) $\frac{16}{3}$

7.( )

A 值爲多少？

(A) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

8.( )

$A^5=kA$，求實數k值爲何？

(A) $-\frac{1}{64}$ (B) $-\frac{1}{32}$ (C) $-\frac{1}{16}$ (D) $-\frac{1}{8}$

9.( )

$|A^{10}|^{-1}$爲幾位數？（$|A|$爲矩陣A的行列式）（已知$\log 2=0.3010$，$\log 3=0.4771$）

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11

10.( )

若$A^3=\begin{bmatrix}3 & -10\\ 2 & -7\end{bmatrix}$，$A^5=\begin{bmatrix}7 & -25\\ 5 & -18\end{bmatrix}$，則$A$爲何？

(A) $\begin{bmatrix}-11 & 40\\ -8 & 29\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}-2 & 5\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}2 & -5\\ 1 & -3\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}18 & 25\\ 5 & 7\end{bmatrix}$

11.(　)

設平面上沿x軸推移y坐標的1倍之線性變換可用二階矩陣A表示，若直線$L:3x+10y=5$經過A^{2012}變換所得直線方程式爲$ax+by=5$，求數對(a,b)等於多少？

(A) $(-3,6026)$ (B) $(-3,-6026)$ (C) $(3,6026)$ (D) $(3,-6026)$

12.(　)

轉移矩陣爲何？

(A) $\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{11}{15}\\ \frac{4}{5} & \frac{4}{15}\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}\frac{11}{15} & \frac{1}{5}\\ \frac{4}{15} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}\frac{11}{15} & \frac{4}{15}\\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{11}{15} & \frac{4}{15}\end{bmatrix}$

13.(　)

如此操作二回合後，黑球仍在甲袋的機率爲何？

(A) $\frac{11}{15}$ (B) $\frac{92}{225}$ (C) $\frac{133}{225}$ (D) $\frac{4}{15}$

14.(　)

假如這種現象仍然繼續，問一年以後甲臺的收視率爲何？

(A) 67% (B) 66.67% (C) 66.7% (D) 66%

15.(　)

在一段時期後會呈現穩定狀態，則在穩定狀態下，甲臺的收視率爲何？

(A) 67% (B) 66.67% (C) 66.7% (D) 66%

二、多選題

1.(　)

下列哪些二階方陣可表示旋轉變換？

(A) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix}-\frac{12}{13} & -\frac{5}{13}\\ \frac{5}{13} & -\frac{12}{13}\end{bmatrix}$

2.(　)

已知矩陣$A_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$性質的敘述，下列哪些選項正確？

(A) 對於任意角度θ，A_θ均表示旋轉變換

(B) $A_{0°}=I_2$

(C) $A_{180°}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

(D) $A_\beta A_\alpha=\begin{bmatrix}\cos(\alpha-\beta) & -\sin(\alpha-\beta)\\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta)\end{bmatrix}$

(E) $(A_\theta)^{-1}=A_\theta$

3.(　)

下列哪些增廣矩陣所表示的一次方程組恰有一組解？

(A) $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -4\end{array}\right]$　(B) $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right]$　(C) $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{array}\right]$

(D) $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$　(E) $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right]$

4.(　)

平面上有一ΔOPQ，其中$O(0,0)$，$P(1,2)$，$Q(3,5)$。若$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ $(A\neq I)$所定義的平面變換將ΔOPQ變換至本身，則下列敘述哪些正確？

(A) $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=1$

(B) O經A所作用的像爲O

(C) $\overline{PQ}$中點經A所作用的像仍爲$\overline{PQ}$中點

(D) $a+b+c+d=-13$

5.(　)

以下哪些變換可把直線 $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ 轉換至 $y=\sqrt{3}x$ ？

(A) 以原點爲中心逆時針旋轉 $30°$

(B) x 坐標伸縮爲 3 倍

(C) 沿 x 軸推移 y 坐標的 $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 倍

(D) 先對直線 $M:\sqrt{3}x+y=0$ 鏡射後，再對直線 $N:x+y=0$ 鏡射

高二數學下矩陣段考

範圍：	矩陣	考試日期：	2014/03/19
適用年級：	高中二年級	適用科目：	數學

題型：　單選題：15題　多選題：5題

一、單選題

1.(B)

一線性變換T將三點$P(2,-1)$、$Q(-1,1)$及$R(10,-7)$變換至$P'(2,4)$、$Q'(1,1)$及R'，則R'之坐標為何？

(A) $(-\frac{5}{3},\frac{8}{3})$　(B) $(2,8)$　(C) $(-10,-1)$　(D) $(-\frac{10}{3},-\frac{1}{3})$

解析

1° $\because P(2,-1)\xrightarrow{T}P'(2,4)$ 且 $Q(-1,1)\xrightarrow{T}Q'(1,1)$

$$\therefore T\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} \text{ 且 } T\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\4&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T=\begin{bmatrix}2&1\\4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}2&1\\4&1\end{bmatrix}\cdot(\frac{1}{2\times1-(-1)\times(-1)})\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4\\5&6\end{bmatrix}$$

2° $\because R(10,-7)\xrightarrow{T}R'$ 且 $T=\begin{bmatrix}3&4\\5&6\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow T\begin{bmatrix}10\\-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4\\5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30-28\\50-42\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\8\end{bmatrix}$$

即$R(10,-7)\xrightarrow{T}R'(2,8)$　$\therefore R'$之坐標$=(2,8)$

故選(B)

2.(A)

設二階方陣$A=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$所表示的線性變換，將直線$L:2x+y=4$變換至$L'$，其中$L$與$L'$之交點為$P$，則$P$點坐標為何？

(A) $(0,4)$　(B) $(0,-4)$　(C) $(-4,0)$　(D) $(4,0)$

解析

1° 已知直線$L: 2x+y=4$，則L上的各點可表示為$(t, 4-2t)$

又$L: 2x+y=4 \xrightarrow{A=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}} L'$

$$\Rightarrow A\begin{bmatrix}t\\4-2t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\4-2t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\2t+4-2t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (t, 4-2t) \xrightarrow{A=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}} (t, 4)$$

2° 設$P=(t, 4)$且為L與L'之交點

$\because P=(t, 4)$為直線$L: 2x+y=4$上的點

$\Rightarrow 2t+4=4 \Rightarrow t=0$

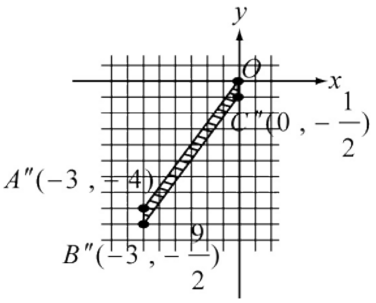
$\therefore P=(0, 4)$

故選(A)

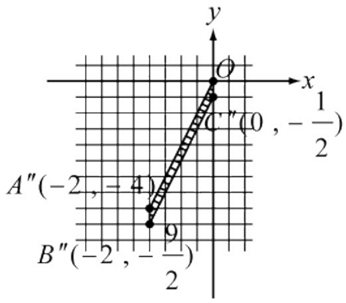
3. (B)

已知變換N的矩陣表示為$\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$，求圖(三)為何？

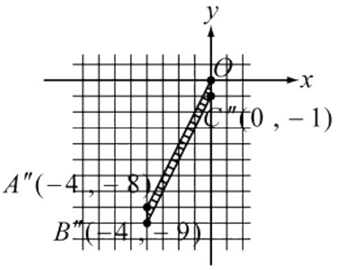
(A)



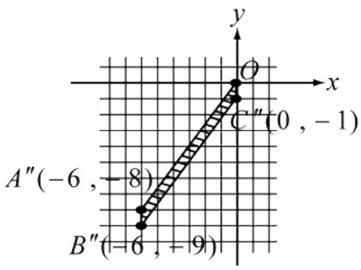
(B)



(C)



(D)



解析

$$O=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$A''=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}$$

$$B''=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-\frac{9}{2}\end{bmatrix}$$

$$C''=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

故選(B)

4.(A)

請問變換M 的矩陣表示爲多少？

(A) $\begin{bmatrix}-2&0\\0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}-2&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&0\\0&-2\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}2&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

解析

設變換$M=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{cases}O=MO=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\\A'=MA=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}\\B'=MB=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\\C'=MC=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\b=0\\c=0\\d=-\frac{1}{2}\end{cases}\quad\therefore M=\begin{bmatrix}-2&0\\0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

故選(A)

5.(D)

若四邊形$OABC$ 映成四邊形$OA''B''C''$ 的線性變換可用矩陣A表示。已知ΔPQR 的面積爲2，經過矩陣A所表示的線性變換後的圖形爲$\Delta P'Q'R'$，則$\Delta P'Q'R'$ 的面積爲何？

(A) 4 (B) 1 (C) 6 (D) 2

解析

$$A = NM = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -4 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |\det(A)| = |\det(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -4 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix})| = |(-2)\times(-\frac{1}{2}) - (-4)\times 0| = 1$$

即面積變爲原來的1倍　$\therefore \Delta P'Q'R'$ 的面積 $= \Delta PQR$ 的面積 $= 2$

故選(D)

6.(D)

設矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ 爲一可逆矩陣，且其行列式值 $\det(A) = \left| \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \right| = 3$，試問 $\det(A - A^{-1})$ 值爲多少？

(A) 16　(B) $\frac{16}{9}$　(C) 4　(D) $\frac{16}{3}$

解析

$$A - A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + \frac{1}{3}a & b + \frac{1}{3}b \\ c + \frac{1}{3}c & -a - \frac{1}{3}a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}a & \frac{4}{3}b \\ \frac{4}{3}c & -\frac{4}{3}a \end{bmatrix} = \frac{4}{3}\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A - A^{-1}) = \det(\frac{4}{3}\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}) = (\frac{4}{3})^2 \times (a \times (-a) - bc)$$

已知 $\det(A) = \left| \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \right| = a \times (-a) - bc = 3$

$$\Rightarrow \det(A - A^{-1}) = (\frac{4}{3})^2 \times (a \times (-a) - bc) = (\frac{4}{3})^2 \times 3 = \frac{16}{3}$$

故選(D)

7.(A)

A 值爲多少？

(A) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

解析

已知$A\cdot\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，$A\cdot\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A\cdot\begin{bmatrix}2&2\\2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A=\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2\\2&-2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\cdot\dfrac{1}{2\times(-2)-2\times2}\cdot\begin{bmatrix}-2&-2\\-2&2\end{bmatrix}$

$=-\dfrac{1}{8}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&-2\\-2&2\end{bmatrix}=-\dfrac{1}{8}\begin{bmatrix}-2&-2\\2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$

$\therefore A=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$

故選(A)

8.(A)

$A^5=kA$，求實數k值為何？

(A) $-\dfrac{1}{64}$　(B) $-\dfrac{1}{32}$　(C) $-\dfrac{1}{16}$　(D) $-\dfrac{1}{8}$

解析

$A^2=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{8}\\-\frac{1}{8}&0\end{bmatrix}$

$A^4=A^2\cdot A^2=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{8}\\-\frac{1}{8}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\frac{1}{8}\\-\frac{1}{8}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{64}&0\\0&-\frac{1}{64}\end{bmatrix}=-\dfrac{1}{64}I_2$

$A^5=A^4\cdot A=(-\dfrac{1}{64}I_2)\cdot A=-\dfrac{1}{64}A$　$\therefore k=-\dfrac{1}{64}$

故選(A)

9.(C)

$|A^{10}|^{-1}$為幾位數？（$|A|$為矩陣A的行列式）（已知$\log 2=0.3010$，$\log 3=0.4771$）

(A) 8　(B) 9　(C) 10　(D) 11

解析

$$|A^{10}|=|(A^2)^5|=(|A^2|)^5=(\left|\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{8}\\ -\frac{1}{8} & 0\end{bmatrix}\right|)^5=[(\frac{1}{8})^2]^5=[(8^{-1})^2]^5=[(2^{-3})^2]^5=2^{-30}$$

$\Rightarrow |A^{10}|^{-1}=(2^{-30})^{-1}=2^{30}$

$\Rightarrow \log(2^{30})=30\times\log 2=30\times 0.3010=9.03$

$\Rightarrow |A^{10}|^{-1}$的位數爲$9+1=10$

故選(C)

10.(C)

若$A^3=\begin{bmatrix}3 & -10\\ 2 & -7\end{bmatrix}$，$A^5=\begin{bmatrix}7 & -25\\ 5 & -18\end{bmatrix}$，則$A$爲何？

(A) $\begin{bmatrix}-11 & 40\\ -8 & 29\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}-2 & 5\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}2 & -5\\ 1 & -3\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}18 & 25\\ 5 & 7\end{bmatrix}$

解析

已知$A^3=\begin{bmatrix}3 & -10\\ 2 & -7\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^6=A^3A^3=\begin{bmatrix}3 & -10\\ 2 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -10\\ 2 & -7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-11 & 40\\ -8 & 29\end{bmatrix}$且$A^6=A^5A$

$$\Rightarrow A=(A^5)^{-1}A^5A=(A^5)^{-1}A^6=(\frac{1}{\det(A^5)}\begin{bmatrix}-18 & 25\\ -5 & 7\end{bmatrix})\cdot\begin{bmatrix}-11 & 40\\ -8 & 29\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{7\times(-18)-5\times(-25)}\begin{bmatrix}-18 & 25\\ -5 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-11 & 40\\ -8 & 29\end{bmatrix}$$

$$=-\begin{bmatrix}-18 & 25\\ -5 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-11 & 40\\ -8 & 29\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -5\\ 1 & -3\end{bmatrix}\quad\therefore A=\begin{bmatrix}2 & -5\\ 1 & -3\end{bmatrix}$$

故選(C)

11.(D)

設平面上沿x軸推移y坐標的1倍之線性變換可用二階矩陣A表示，若直線$L:3x+10y=5$經過A^{2012}變換所得直線方程式爲$ax+by=5$，求數對(a,b)等於多少？

(A) $(-3,6026)$ (B) $(-3,-6026)$ (C) $(3,6026)$ (D) $(3,-6026)$

解析

1° 設平面上沿 x 軸推移 y 坐標的1倍，即$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y \end{cases}$

$\Rightarrow$線性變換用二階矩陣 A 表示，$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2° $\because A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow A^{2012} = \begin{bmatrix} 1 & 2012 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^{2012} = \begin{bmatrix} 1 & 2012 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3° 已知$L: 3x + 10y = 5 \quad \rightarrow \quad L': ax + by = 5$

又$(0, \frac{1}{2})$、$(\frac{5}{3}, 0)$為直線$L: 3x + 10y = 5$上的二點

$\Rightarrow$經過A^{2012}變換

$$\begin{cases} A^{2012}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2012 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1006 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ A^{2012}\begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2012 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1006 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$為 $ax + by = 5$ 上的二點

將$\begin{bmatrix} 1006 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$二點代入 $ax + by = 5$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1006a + \frac{1}{2}b = 5 \\ \frac{5}{3}a = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -6026 \end{cases} \quad \therefore (a, b) = (3, -6026)$$

故選(D)

12. (B)

轉移矩陣為何？

(A) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{11}{15} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{15} \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} \frac{11}{15} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{15} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} \frac{11}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{11}{15} & \frac{4}{15} \end{bmatrix}$

解析

設甲袋中狀態 S_1：1黑球 2 白球，S_2：3 白球

經一局後 $S_1 \to S_1 \Rightarrow P_{11} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \times 1 = \frac{11}{15}$

$S_2 \to S_1 \Rightarrow P_{12} = 1 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$

$S_1 \to S_2 \Rightarrow P_{21} = \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$

$S_2 \to S_2 \Rightarrow P_{22} = 1 \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow$ 轉移矩陣 $A = \begin{bmatrix} \frac{11}{15} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{15} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

故選(B)

13. (C)

如此操作二回合後，黑球仍在甲袋的機率爲何？

(A) $\frac{11}{15}$ (B) $\frac{92}{225}$ (C) $\frac{133}{225}$ (D) $\frac{4}{15}$

解析

設初始狀態 $X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to S_1 \\ \to S_2 \end{matrix}$

一局後 $X_1 = AX_0 = \begin{bmatrix} \frac{11}{15} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{15} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{15} \\ \frac{4}{15} \end{bmatrix}$

二局後 $X_2 = AX_1 = \begin{bmatrix} \frac{11}{15} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{15} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{11}{15} \\ \frac{4}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{133}{225} \\ \frac{92}{225} \end{bmatrix}$

$\therefore$ 黑球仍在甲袋的機率爲 $\frac{133}{225}$

故選(C)

14. (C)

假如這種現象仍然繼續，問一年以後甲臺的收視率爲何？

(A) 67% (B) 66.67% (C) 66.7% (D) 66%

解析

由首6個月內收視率變化得知轉移矩陣$A=\begin{bmatrix}0.7 & 0.6\\0.3 & 0.4\end{bmatrix}$

設初始狀態$X_0=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{matrix}\to S_1\\\to S_2\end{matrix}$

首6個月內，$X_1=AX_0=\begin{bmatrix}0.7 & 0.6\\0.3 & 0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.7\\0.3\end{bmatrix}$

一年內，$X_2=AX_1=\begin{bmatrix}0.7 & 0.6\\0.3 & 0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.7\\0.3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.67\\0.33\end{bmatrix}$

一年6個月內，$X_3=AX_2=\begin{bmatrix}0.7 & 0.6\\0.3 & 0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.67\\0.33\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.667\\0.333\end{bmatrix}$

∴一年以後甲臺的收視率爲66.7%

故選(C)

15.(B)

在一段時期後會呈現穩定狀態，則在穩定狀態下，甲臺的收視率爲何？

(A) 67%　(B) 66.67%　(C) 66.7%　(D) 66%

解析

二年內，$X_4=AX_3=\begin{bmatrix}0.7 & 0.6\\0.3 & 0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.667\\0.333\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.6667\\0.3333\end{bmatrix}$

二年6個月內，$X_5=AX_4=\begin{bmatrix}0.7 & 0.6\\0.3 & 0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.6667\\0.3333\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.66667\\0.33333\end{bmatrix}$

$\vdots$

∴在穩定狀態下甲臺的收視率爲66.67%

故選(B)

二、多選題

1.(A;C;E)

下列哪些二階方陣可表示旋轉變換？

(A) $\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$　(E) $\begin{bmatrix}-\frac{12}{13} & -\frac{5}{13}\\\frac{5}{13} & -\frac{12}{13}\end{bmatrix}$

解析

已知旋轉變換$R_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

(A) $\theta=270^\circ$代入$R_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

$R_{270^\circ}=\begin{bmatrix}\cos 270^\circ & -\sin 270^\circ\\ \sin 270^\circ & \cos 270^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ $\therefore$正確

(B) 假設$R_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \sin\theta=\frac{4}{5}$且$-\sin\theta=\frac{4}{5}\Rightarrow\theta$不存在 $\therefore$錯誤

(C) 假設$R_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \sin\theta=-\frac{1}{2}$且$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\theta=210^\circ+2\pi k,\ k\in Z$且$k\geq 0$ $\therefore$正確

(D) 假設$R_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$且$-\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

又$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$且$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\theta$不存在 $\therefore$錯誤

(E) 假設$R_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{12}{13} & -\frac{5}{13}\\ \frac{5}{13} & -\frac{12}{13}\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \sin\theta=\frac{5}{13}>0$且$\cos\theta=-\frac{12}{13}<0\Rightarrow\theta$存在且爲第 II 象限角 $\therefore$正確

故選(A)(C)(E)

2.(C)

已知矩陣$A_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$性質的敘述，下列哪些選項正確？

(A) 對於任意角度θ，A_θ均表示旋轉變換

(B) $A_{0^\circ}=I_2$

(C) $A_{180^\circ}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

(D) $A_\beta A_\alpha=\begin{bmatrix}\cos(\alpha-\beta) & -\sin(\alpha-\beta)\\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta)\end{bmatrix}$

(E) $(A_\theta)^{-1}=A_\theta$

解析

(A) 對於任意角度旋轉變換應表示爲$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$，而非$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$ $\therefore$錯誤

(B) 已知$I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$\theta=0^\circ$代入$A_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A_{0^\circ}=\begin{bmatrix}\cos0^\circ & -\sin0^\circ\\ \sin0^\circ & -\cos0^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2$ $\therefore$錯誤

(C) $\theta=180^\circ$代入$A_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A_{180^\circ}=\begin{bmatrix}\cos180^\circ & -\sin180^\circ\\ \sin180^\circ & -\cos180^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $\therefore$正確

(D) 已知$A_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$

$\theta=\alpha$代入$A_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$、$\theta=\beta$代入$A_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A_\alpha=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{bmatrix}$、$A_\beta=\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & -\cos\beta\end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}A_\beta A_\alpha&=\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & -\cos\beta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha & -\cos\beta\sin\alpha+\sin\beta\cos\alpha\\ \sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha & -\sin\beta\sin\alpha+\cos\beta\cos\alpha\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta\\ \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha-\beta)\\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}\cos(\alpha-\beta) & -\sin(\alpha-\beta)\\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta)\end{bmatrix}\end{aligned}$$ $\therefore$錯誤

(E) 若$(A_\theta)^{-1}=A_\theta\Rightarrow A_\theta A_\theta=I_2$

$\Rightarrow A_\theta A_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos2\theta & \sin(\theta-\theta)\\ \sin(\theta-\theta) & \cos2\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos2\theta & 0\\ 0 & \cos2\theta\end{bmatrix}\neq I_2$

$\therefore$錯誤

故選(C)

3.(A;B;E)

下列哪些增廣矩陣所表示的一次方程組恰有一組解？

(A) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right]$ (B) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ (C) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$

(D) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ (E) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

解析

(A) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right] \times\frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right] \Rightarrow$ 方程組有唯一解　$\therefore$正確

(B) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \times(-1) \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \times(-3) \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \times\frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

$\Rightarrow$ 方程組有唯一解　$\therefore$正確

(C) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{5} \end{array}\right] \Rightarrow$ 無解　$\therefore$錯誤

(D) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{array}\right] \Rightarrow$ 無限多組解　$\therefore$錯誤

(E) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \times\frac{1}{3} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \times(-2) \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

$\Rightarrow$ 方程組有唯一解$(0,0,0)$　$\therefore$正確

故選(A)(B)(E)

4.(B;C;D)

平面上有一ΔOPQ，其中$O(0,0)$，$P(1,2)$，$Q(3,5)$。若$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $(A \neq I)$所定義的平面變換將ΔOPQ變換至本身，則下列敘述哪些正確？

(A) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$

(B) O經A所作用的像為O

(C) $\overline{PQ}$中點經A所作用的像仍為$\overline{PQ}$中點

(D) $a+b+c+d=-13$

解析

若$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $(A\neq I)$所定義的平面變換將ΔOPQ變換至本身

即$\begin{cases} A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\ A\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{1\times5-2\times3}\cdot\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -13 & 8 \\ -21 & 13 \end{bmatrix}$$

$\therefore a=-13$、$b=8$、$c=-21$、$d=13$

(A) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -13 & 8 \\ -21 & 13 \end{vmatrix}=-13\times13-(-21)\times8=-1\neq1$ $\therefore$錯誤

(B) O經A作用$\Rightarrow AO=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -13 & 8 \\ -21 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\therefore$正確

(C) $\overline{PQ}$中點$=(\frac{1+3}{2},\frac{2+5}{2})=(2,\frac{7}{2})$經$A$作用$\Rightarrow A\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -13 & 8 \\ -21 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$ $\therefore$正確

(D) $a+b+c+d=-13+8+(-21)+13=-13$ $\therefore$正確

故選(B)(C)(D)

5.(A;C;D)

以下哪些變換可把直線$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$轉換至$y=\sqrt{3}x$？

(A) 以原點為中心逆時針旋轉$30°$

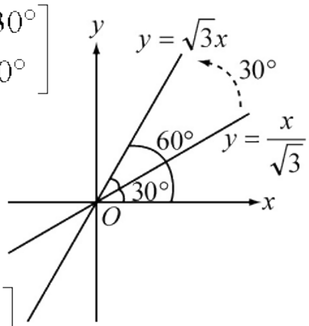
(B) x坐標伸縮為3倍

(C) 沿x軸推移y坐標的$-\frac{2}{\sqrt{3}}$倍

(D) 先對直線$M:\sqrt{3}x+y=0$鏡射後，再對直線$N:x+y=0$鏡射

解析

(A) 以原點爲中心逆時針旋轉 $30°$ ⇒ 旋轉變換 $R_{30°}=\begin{bmatrix}\cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30°\end{bmatrix}$



設 $(\sqrt{3}t, t)$, $t\in R$ 爲直線 $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ 上的點

經 $R_{30°}$ 轉換

$$\Rightarrow R_{30°}\begin{bmatrix}\sqrt{3}t \\ t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30°\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3}t \\ t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3}t \\ t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t \\ \sqrt{3}t\end{bmatrix}$$

將點 $(t, \sqrt{3}t)$, $t\in R$ 代入直線 $y=\sqrt{3}x \Rightarrow \sqrt{3}t=\sqrt{3}t$

故以原點爲中心逆時針旋轉 $30°$ 可將直線 $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ 轉換至 $y=\sqrt{3}x$　∴正確

(B) x 坐標伸縮爲 3 倍 ⇒ 線性變換 $S=\begin{bmatrix}3 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$

設 $(\sqrt{3}t, t)$, $t\in R$ 爲直線 $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ 上的點, 經 S 轉換 $\Rightarrow S\begin{bmatrix}\sqrt{3}t \\ t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3}t \\ t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\sqrt{3}t \\ t\end{bmatrix}$

將點 $(3\sqrt{3}t, t)$, $t\in R$ 代入直線 $y=\sqrt{3}x \Rightarrow t\neq 9t$

故 x 坐標伸縮爲 3 倍不可將直線 $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ 轉換至 $y=\sqrt{3}x$　∴錯誤

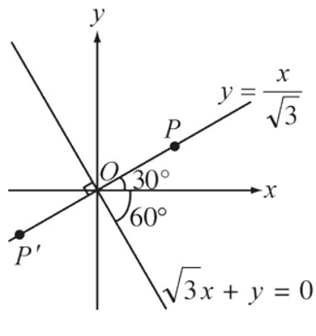
(C) 沿 x 軸推移 y 坐標的 $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 倍 ⇒ 推移變換 $S_x=\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1\end{bmatrix}$

設 $(\sqrt{3}t, t)$, $t\in R$ 爲直線 $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ 上的點, 經 S_x 轉換 $\Rightarrow S_x\begin{bmatrix}\sqrt{3}t \\ t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3}t \\ t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{3}t \\ t\end{bmatrix}$

將點 $(\dfrac{\sqrt{3}}{3}t, t)$, $t\in R$ 代入直線 $y=\sqrt{3}x \Rightarrow t=t$

故沿 x 軸推移 y 坐標的 $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 倍可將直線 $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ 轉換至 $y=\sqrt{3}x$　∴正確

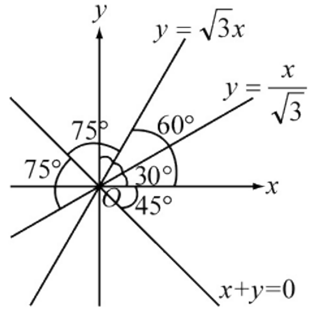
(D) 1° $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ 先對直線 $M:\sqrt{3}x+y=0$ 鏡射



如右圖, 直線 $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ 上任一點 P 對直線 $M:\sqrt{3}x+y=0$ 做鏡射,

則爲點 P', 故鏡射後的直線方程式亦爲 $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$。

2° 再對直線 $N:x+y=0$ 鏡射



由右圖得知：直線 $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ 與直線 $N:x+y=0$ 夾 $75°$ 角,

且直線 $N:x+y=0$ 與直線 $y=\sqrt{3}x$ 亦夾 $75°$ 角

故直線 $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ 對直線 $N:x+y=0$ 做鏡射其結果爲直線