

段考錦囊

 名師學院™
年級：高中二年級

範圍：下學期第一次段考

科目：物理



一、一分鐘準備段考

- 清楚每個物理名詞的定義
- 公式不要死記，要能推導
- 利用名師學院系列產品，反覆觀看、補強弱點

二、重點回顧

➤ 萬有引力

一、古代天體運行理論與克卜勒定律產生的背景

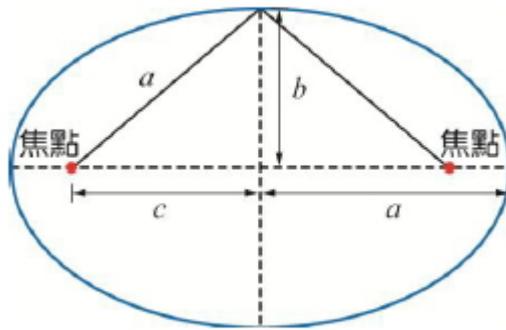
1. 地球中心說：希臘哲學家托勒密結合宗教、傳說與簡單觀測的結果，推論地球為宇宙的中心，日、月與其他行星皆繞地球運轉。
2. 太陽中心說：波蘭天文學家哥白尼提出太陽才是宇宙中心的觀點，地球與其他各行星皆繞太陽運轉。
3. 丹麥天文學家第谷·布拉依據其觀測結果，認為地球為宇宙的中心，太陽繞地球運轉，而其他行星則是繞太陽運行。
4. 德國天文學家克卜勒依據其老師第谷·布拉大量的觀測結果，分析歸納出行星運動的三大定律，並推翻以地球為宇宙中心的論點，提出太陽才是宇宙中心的看法。
5. 至今科學界了解太陽亦非宇宙的中心，且了解到宇宙中存在許多不同結構與不同尺度大小的天體，太陽只是眾多恆星中的其中一顆恆星而已，但克卜勒所提出的行星運動三大定律，為天體運行的研究帶來了重大的突破。

二、克卜勒第一定律（軌道定律，1609 年）

1. 定律內容：行星繞太陽運行，在以太陽為兩焦點之一的橢圓軌道上運行。

2. 橢圓的數學式：
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- $a^2 = b^2 + c^2$ ，其中 a 為半長軸， b 為半短軸， c 則為焦距
- 橢圓的離心率（偏心率） $e = \frac{c}{a}$ ，若其中 $c = 0$ ，則 $a = b = r$ ，即為半徑 r 的圓形。
- 橢圓形面積： πab ；圓形面積： πr^2



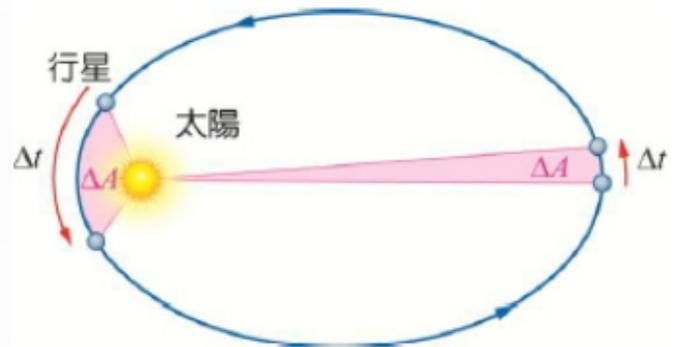
三、克卜勒第二定律（等面積定律，1609 年）

1. 定律內容：行星繞太陽運行，其與太陽間的連線，在相同的時間內掠掃過相等的面積。

2. 面積速率公式：

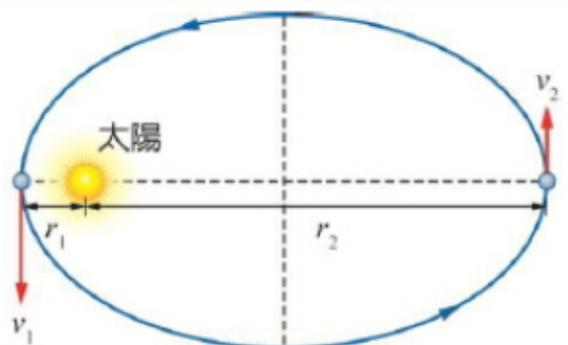
$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r v \sin \theta = \frac{1}{2} r^2 \omega = \text{定值}$$

（隨各行星而異）



3. 若行星位於橢圓軌道長軸的兩端點（即 $\theta = 90^\circ$ ），則可得：

$$r_1 v_1 = r_2 v_2 \Rightarrow r_1^2 \omega_1 = r_2^2 \omega_2$$



四、克卜勒第三定律（週期定律，1619 年）

1. 定律內容：各行星繞太陽運行，其與太陽間平均距離的立方，與其週期平方的比值均相同，而與行星無關。

2. 公式： $\frac{r^3}{T^2} = K$ ，其中

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{平均半徑 } r = \frac{r_1 + r_2}{2} = a \text{ (半長軸)} \\ \text{常數 } K = \frac{GM}{4\pi^2} \text{ (與軌道上行星的質量 } m \text{ 無關)} \end{array} \right.$$

五、克卜勒行星運動定律的探討

1. 克卜勒第二定律適用於探討同一行星，在同一橢圓軌道上運行時，不同

時刻與不同位置狀況的分析。

- 克卜勒第三定律適用於探討不同行星繞同一恆星，或是不同衛星繞同一行星的狀況。

- 若假設行星作等速率圓周運動，則面積速率 $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}rv$ ，週期 $T = \frac{2\pi r}{v}$

六、萬有引力定律

- 定律內容：兩質點間萬有引力的量值，與兩質點的質量乘積成正比，而與兩質點間的距離平方成反比。
- 公式： $F_g = \frac{GMm}{r^2}$ ，其中 **G** 稱為萬有引力常數（重力常數），由卡文狄西首先以扭秤實驗測得，近年精準的測定值為 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ [N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2]$
- 萬有引力方向：在兩質點的連心線上，為一對作用力與反作用力。

七、由克卜勒定律推導出萬有引力定律

- 首先考慮月球繞地球作圓周運動時，需要向心力，假設月球質量為 m ，

$$\text{則向心力： } F_c = ma_c$$

- 由等速率圓周運動的向心力結合克卜勒第三定律：

$$F_c = m \frac{v^2}{r} = m \frac{4\pi^2 r}{T^2} = m \frac{4\pi^2 r^3}{r^2 T^2} = m \frac{4\pi^2 K}{r^2}$$

- 假設地球質量為 M ，令 $4\pi^2 K \propto M$ ，由牛頓第三運動定律：

$$\vec{F}_{Mm} = -\vec{F}_{mM} \Rightarrow F_g = \frac{GMm}{r^2}$$

八、重力加速度（重力場）

- 定義：重力加速度是指物體僅受重力作用時所產生的加速度，通常以 g 為代表符號。
- 質量為 m 的物體與質量為 M 的地球中心距離為 r 時（ r 大於地球半徑），所受到的重力 mg 即等於其與地球之間的萬有引力 F_g ，即 $mg = \frac{GMm}{r^2}$ ，所以重力加速度 $g = \frac{GM}{r^2}$ ；此為地球外的重力加速度量值，加速度方向指向地心。

九、衛星運動（以圓形軌道計算）

1. 力：衛星所受萬有引力提供其作圓周運動所需的向心力，即 $F_g = F_c$

$$\Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = ma_c$$

2. 向心加速度： $a_c = \frac{GM}{r^2} = g = \omega^2 r = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$

3. 速率： $v = \omega r = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{rg}$

4. 週期： $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$

5. 克卜勒第三定律： $\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = K$

十、地表衛星

1. 地表衛星的軌道半徑 r 約等於地球的半徑 R 。

$$2. \begin{cases} v_{\max} = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{g_0 R} \approx 7.9 \text{ [km/s]} \\ T_{\min} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{g_0}} \approx 5050 \text{ [s]} \approx 84 \text{ [min]} \end{cases}$$

g_0 ：專指地球本身於地表產生的重力加速度。

十一、同步衛星

1. 同步衛星的繞行週期 T 約等於地球的自轉週期。

$$2. \begin{cases} T = \text{地球的自轉週期} = 1 \text{ 天} \\ r \approx 6.6R \text{ (距離地面的高度約為 } 5.6R \text{)} \end{cases}$$

十二、人造衛星繞行星公轉時，其內部的物體是處於失重的狀態。

十三、地球自轉對物體視重的影響

1. 物體在赤道上：

$$\text{離心力} = ma_c = m \cdot \frac{4\pi^2 R}{T^2} \approx \frac{1}{300} mg_0, \text{ 視重} = mg_0 - \frac{1}{300} mg_0 = \frac{299}{300} mg_0$$

2. 物體在南北極上：

$$\text{離心力} = 0, \text{ 視重} = mg_0 - 0 = mg_0$$



名師學院™

www.kut.com.tw

精選試卷及詳解



名師學院™

www.kut.com.tw

考試日期僅供參考

高二物理全萬有引力段考

範圍： 萬有引力

考試日期： 2014/02/05

適用年級： 高中二年級

適用科目： 物理

題型： 單選題：10題 多選題：5題

一、單選題

1.()

一衛星環繞一行星作橢圓軌道運動，假設此衛星至行星最遠距離與最近距離的比為 3 : 1，則最遠距離位置與最近距離位置的速率比為何？

- (A) 1 : 1 (B) 1 : 3 (C) 3 : 1 (D) 1 : 9 (E) 9 : 1

2.()

假設一人造衛星以圓形軌道繞地球運行，其平均軌道半徑為月球平均軌道半徑的 $\frac{1}{3}$ ，則此衛星繞地球的週期範圍為下列何者？

- (A) 在一至四天之間 (B) 在四至八天之間 (C) 在八至十六天之間
(D) 大於十六天 (E) 與地球自轉週期相同

3.()

地球的半徑為 R ，當一火箭的重量為在海平面上重量的一半時，此火箭距離地面的高度 h 為何？

- (A) $2R$ (B) R (C) $\sqrt{2}R$ (D) $(\sqrt{2} - 1)R$ (E) $\frac{R}{2}$

4.()

假定地球為一正圓球，且半徑為 6400 公里，若欲使赤道上物體的視重為零，則其自轉週期應為多久？

- (A) 41 小時 (B) 17 小時 (C) 1.4 小時 (D) 24 分 (E) 9.8 分

5.()

已知在月球上的物體重量，為在地球上的 $\frac{1}{6}$ ，若月球的質量為地球的 $\frac{1}{1200}$ ，則月球的半徑應為地球的多少倍？

- (A) $\frac{1}{10\sqrt{2}}$ (B) $\frac{1}{10}$ (C) $\frac{1}{200}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

6.()

設地球的半徑為 R ，爲了預測地球的質量，科學家在地球的上空放置了一個地表衛星，今測得此地表衛星的週期爲 T ，並令萬有引力常數爲 G ，則地球的質量爲何？

- (A) $\frac{\pi^2 R^3}{GT^2}$ (B) $\frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$ (C) $\frac{4\pi^2 R^2}{GT^2}$ (D) $\frac{\pi^2 R^2}{GT^2}$

7.()

一人造衛星在地球表面上高度爲 R 的圓周軌道上運行 (R 爲地球的半徑)。如果在此高度上的重力加速度爲 g ，則此人造衛星的速率爲何？

- (A) $\sqrt{2gR}$ (B) \sqrt{gR} (C) $2\sqrt{gR}$ (D) $\sqrt{3gR}$ (E) $\sqrt{\frac{gR}{2}}$

8.()

小王子在星際旅行的過程中，發現太陽系中有一個小行星，其與太陽的距離是地球與太陽距離的 16 倍，試估計此小行星的週期約爲多少年？

- (A) 12 (B) 22.6 (C) 48 (D) 1 (E) 64

9.()

當成熟的蘋果由樹上落下時，根據牛頓的萬有引力定律，下列敘述哪一項是正確的？

- (A) 地球對蘋果有吸引力，但是蘋果對地球沒有吸引力
(B) 蘋果對地球有吸引力，但是地球對蘋果沒有吸引力
(C) 僅考慮力的量值時，地球對蘋果的吸引力大於蘋果對地球的吸引力
(D) 僅考慮力的量值時，地球對蘋果的吸引力小於蘋果對地球的吸引力
(E) 僅考慮力的量值時，地球對蘋果的吸引力等於蘋果對地球的吸引力

10.()

下列敘述中，哪一項是正確的？

- (A) 人造衛星繞地球作圓周運動時，因不受地球引力的作用，故處於失重狀態
(B) 承(A)，在衛星內的單擺，其週期爲零
(C) 地球繞太陽運轉，由近日點至遠日點時，地球動量的變化量爲零
(D) 地球繞太陽所受的萬有引力，即爲其運轉的向心力
(E) 太陽系中距離太陽愈遠的行星，繞行太陽的週期愈大

二、多選題

1.()

下列有關行星繞日運動的敘述，哪些正確？

- (A) 行星的軌道均為圓形
- (B) 行星的公轉週期正比於其軌道半徑
- (C) 繞相同恆星運行的每個行星，其面積速率皆不相同
- (D) 土星的公轉週期大於金星的公轉週期
- (E) 行星繞太陽作等加速運動

2.()

假設地球的密度均勻，則當地球的密度不變，而半徑增為原來的兩倍時，下列敘述中哪些是正確的？

- (A) 地球表面的重力加速度 g 值變為 2 倍
- (B) 地表上的單擺（小角度擺動）週期變為 $\frac{1}{2}$ 倍
- (C) 地表上的彈簧振動（SHM）週期變為 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍
- (D) 地表上的某人重量變為 2 倍
- (E) 地表上的某人跳躍時，距離地面的高度變為 2 倍

3.()

人造衛星繞地球運轉時所需的向心力，即為地球施於衛星的萬有引力，假設 G 為萬有引力常數， M 為地球的質量， R 為衛星的軌道半徑，則由此條件可以導出的正確結果為下列哪些選項？

- (A) 衛星的速率 $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$
- (B) 衛星的週期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$
- (C) 克卜勒行星運動第三定律 $\frac{T^2}{R^3} = \text{定值}$
- (D) $\rho T^2 = \text{定值}$ ，其中 ρ 為地球的密度，而此式適合用於任何軌道間
- (E) 若衛星的角速度為 ω ，則地球的質量 $M = \frac{R^3\omega^2}{G}$

4.()

所謂的同步衛星是指衛星相對地面而言靜止不動，猶如懸在空中一樣，所以同步衛星的角速度和地球自轉的角速度相同；則下列相關的敘述，哪些正確？

- (A) 同步衛星的高度和速率是固定的
- (B) 同步衛星的高度和速率是可以選擇的，只要維持角速度與地球自轉的角速度相同即可
- (C) 同步衛星在地球上空的緯度只可能是零度，即只能在赤道上空
- (D) 同步衛星在地球上空的緯度是可以選擇的，只要維持角速度與地球自轉的角速度相同即可
- (E) 同步衛星上的物體處於失重狀態，所以不會受到地球的引力作用

5.()

人造衛星在愈高的地方飛行時，其下列哪幾種物理量會愈小？

- (A) 速率
- (B) 週期
- (C) 向心加速度
- (D) 所受的引力
- (E) 繞行地球的頻率

高二物理全萬有引力段考

範圍： 萬有引力

考試日期： 2014/02/05

適用年級： 高中二年級

適用科目： 物理

題型： 單選題：10題 多選題：5題

一、單選題

1. (B)

一衛星環繞一行星作橢圓軌道運動，假設此衛星至行星最遠距離與最近距離的比為 3 : 1，則最遠距離位置與最近距離位置的速率比為何？

(A) 1 : 1 (B) 1 : 3 (C) 3 : 1 (D) 1 : 9 (E) 9 : 1

解析

根據克卜勒行星運動第二定律，衛星在單位時間所掃過的面積是一樣的，

故由 $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r v \sin \theta$ ，可得知 $r_{\text{近}} v_{\text{近}} = r_{\text{遠}} v_{\text{遠}}$ ，所以 $\frac{v_{\text{近}}}{v_{\text{遠}}} = \frac{r_{\text{遠}}}{r_{\text{近}}} = \frac{1}{3} \Rightarrow v_{\text{近}} : v_{\text{遠}} = 1 : 3$

2. (B)

假設一人造衛星以圓形軌道繞地球運行，其平均軌道半徑為月球平均軌道半徑的 $\frac{1}{3}$ ，則此衛星繞地球的週期範圍為下列何者？

(A) 在一至四天之間 (B) 在四至八天之間 (C) 在八至十六天之間
(D) 大於十六天 (E) 與地球自轉週期相同

解析

由克卜勒行星運動第三定律，可得知： $\frac{R_{\text{衛}}^3}{T_{\text{衛}}^2} = \frac{R_{\text{月}}^3}{T_{\text{月}}^2}$ ，

而月球繞地球運行的週期約為 27.3 天，故可列得：

$$T_{\text{衛}}^2 = R_{\text{衛}}^3 \times \frac{T_{\text{月}}^2}{R_{\text{月}}^3} = \left(\frac{1}{3} R_{\text{月}}\right)^3 \times \frac{27.3^2}{R_{\text{月}}^3} = 27.6 \Rightarrow T_{\text{衛}} = \sqrt{27.6} = 5.25 \text{ [天]}，故選(B)。$$

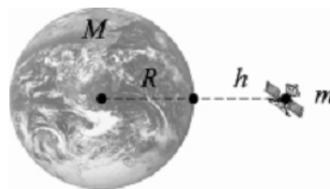
3. (D)

地球的半徑為 R ，當一火箭的重量為在海平面上重量的一半時，此火箭距離地面的高度 h 為何？

(A) $2R$ (B) R (C) $\sqrt{2}R$ (D) $(\sqrt{2}-1)R$ (E) $\frac{R}{2}$

解析

如圖所示，當此火箭距離地面的高度為 h 時，
重量為在海平面上重量的一半，



故利用萬有引力公式，可列式得：
$$\frac{GMm}{(R+h)^2} = \frac{1}{2} \frac{GMm}{R^2}$$

所以 $(R+h)^2 = 2R^2 \Rightarrow R+h = \sqrt{2}R \Rightarrow h = (\sqrt{2}-1)R$

4. (C)

假定地球為一正圓球，且半徑為 6400 公里，若欲使赤道上物體的視重為零，則其自轉週期應為多久？

(A) 41 小時 (B) 17 小時 (C) 1.4 小時 (D) 24 分 (E) 9.8 分

解析

欲使赤道上物體的視重為零，代表此處物體所受的重力即為向心力，

所以可列式得：
$$mg = m \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$
，因此其週期 $T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{6400000}{10}}$ ，

可算得自轉週期大約為 1.4 [hr]

5. (A)

已知在月球上的物體重量，為在地球上的 $\frac{1}{6}$ ，若月球的質量為地球的 $\frac{1}{1200}$ ，則月球的半徑應為地球的多少倍？

(A) $\frac{1}{10\sqrt{2}}$ (B) $\frac{1}{10}$ (C) $\frac{1}{200}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

解析

物體所受的重力即為其所受的萬有引力，所以 $mg = \frac{GMm}{R^2} \Rightarrow g = \frac{GM}{R^2}$ ，

由於物體重量在月球上為在地球上的 $\frac{1}{6}$ ，

故地球的重力加速度 g 應為月球的 6 倍，

可列式得：
$$g_{\text{地}} : g_{\text{月}} = \frac{GM_{\text{地}}}{R_{\text{地}}^2} : \frac{GM_{\text{月}}}{R_{\text{月}}^2} = \frac{M_{\text{地}}}{R_{\text{地}}^2} : \frac{\frac{1}{1200}M_{\text{地}}}{R_{\text{月}}^2} = 6 : 1$$

$\Rightarrow R_{\text{月}}^2 = \frac{1}{200}R_{\text{地}}^2 \Rightarrow R_{\text{月}} = \frac{1}{\sqrt{200}}R_{\text{地}} = \frac{1}{10\sqrt{2}}R_{\text{地}}$

6. (B)

設地球的半徑為 R ，爲了預測地球的質量，科學家在地球的上空放置了一個地表衛星，今測得此地表衛星的週期爲 T ，並令萬有引力常數爲 G ，則地球的質量爲何？

- (A) $\frac{\pi^2 R^3}{GT^2}$ (B) $\frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$ (C) $\frac{4\pi^2 R^2}{GT^2}$ (D) $\frac{\pi^2 R^2}{GT^2}$

解析

地表衛星所受到的重力，即爲其繞地球運行的向心力，

故可列式得： $\frac{GMm}{R^2} = m \frac{4\pi^2 R}{T^2} \Rightarrow$ 地球的質量 $M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$

7. (A)

一人造衛星在地球表面上高度爲 R 的圓周軌道上運行 (R 爲地球的半徑)。如果在此高度上的重力加速度爲 g ，則此人造衛星的速率爲何？

- (A) $\sqrt{2gR}$ (B) \sqrt{gR} (C) $2\sqrt{gR}$ (D) $\sqrt{3gR}$ (E) $\sqrt{\frac{gR}{2}}$

解析

此人造衛星所受的向心力 $F_c = m \frac{v^2}{R} = m \times$ 重力加速度 \Rightarrow 重力加速度 $= \frac{v^2}{R}$ ，

而此人造衛星與地心的距離爲 $R + R = 2R$ ，故 $g = \frac{v^2}{2R}$ ，

可得人造衛星的速率 $v = \sqrt{2gR}$

8. (E)

小王子在星際旅行的過程中，發現太陽系中有一個小行星，其與太陽的距離是地球與太陽距離的 16 倍，試估計此小行星的週期約爲多少年？

- (A) 12 (B) 22.6 (C) 48 (D) 1 (E) 64

解析

由克卜勒行星運動第三定律可得：

$$\frac{R_{\text{地}}^3}{T_{\text{地}}^2} = \frac{R_{\text{行}}^3}{T_{\text{行}}^2} \Rightarrow T_{\text{行}}^2 = R_{\text{行}}^3 \times \frac{T_{\text{地}}^2}{R_{\text{地}}^3} = (16 \times 1)^3 \times \frac{1^2}{1^3} = 16^3 \Rightarrow T_{\text{行}} = \sqrt{16^3} = 64 \text{ [year]}$$

9. (E)

當成熟的蘋果由樹上落下時，根據牛頓的萬有引力定律，下列敘述哪一項是正確的？

- (A) 地球對蘋果有吸引力，但是蘋果對地球沒有吸引力
 (B) 蘋果對地球有吸引力，但是地球對蘋果沒有吸引力
 (C) 僅考慮力的量值時，地球對蘋果的吸引力大於蘋果對地球的吸引力
 (D) 僅考慮力的量值時，地球對蘋果的吸引力小於蘋果對地球的吸引力
 (E) 僅考慮力的量值時，地球對蘋果的吸引力等於蘋果對地球的吸引力

解析

地球與蘋果間彼此都有相互吸引的作用力，即爲萬有引力；若令萬有引力常數爲 G ，地球的質量爲 M ，蘋果的質量爲 m ，地球與蘋果間的距離爲 R ，則兩者間的萬有引力皆爲 $\frac{GMm}{R^2}$ 。

10. (E)

下列敘述中，哪一項是正確的？

- (A) 人造衛星繞地球作圓周運動時，因不受地球引力的作用，故處於失重狀態
- (B) 承(A)，在衛星內的單擺，其週期為零
- (C) 地球繞太陽運轉，由近日點至遠日點時，地球動量的變化量為零
- (D) 地球繞太陽所受的萬有引力，即為其運轉的向心力
- (E) 太陽系中距離太陽愈遠的行星，繞行太陽的週期愈大

解析

(A) 人造衛星運行時受地球引力作用，此引力提供衛星作為繞行地球時的向心力，故處於失重狀態；(B) 承(A)，由於衛星處於失重狀態，所以單擺不會擺動，週期為無窮大；(C) 地球受到太陽的萬有引力作用而作圓周運動，其動量的變化量不為零；(D) 地球運行的軌跡為橢圓形，所受太陽的萬有引力可分解為切線方向的分力與法線方向的分力，切線方向的分力用於改變地球速率的大小，法線方向的分力則作為地球運行的向心力；(E) 根據克卜勒行星運動第三定律可知 $\frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{T_2^2}$ ，故距離太陽愈遠的行星，其繞行半徑愈大時，週期也愈大。

二、多選題

1. (C;D)

下列有關行星繞日運動的敘述，哪些正確？

- (A) 行星的軌道均為圓形
- (B) 行星的公轉週期正比於其軌道半徑
- (C) 繞相同恆星運行的每個行星，其面積速率皆不相同
- (D) 土星的公轉週期大於金星的公轉週期
- (E) 行星繞太陽作等加速運動

解析

(A) 行星繞太陽的軌道應為橢圓形；(B)(D) 由克卜勒行星運動第三定律可知 $\frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{T_2^2}$ ，故應

為公轉週期的平方正比於軌道半徑的三次方；因土星的軌道半徑大於金星的軌道半徑，故土星的公轉週期大於金星的公轉週期；(C) 繞相同恆星運行的每個行星，其軌道不相同，面積速率也不相同；(E) 行星繞太陽時，受力的方向一直在改變，所以應作變加速運動。

2. (A;D)

假設地球的密度均勻，則當地球的密度不變，而半徑增為原來的兩倍時，下列敘述中哪些是正確的？

- (A) 地球表面的重力加速度 g 值變為 2 倍
- (B) 地表上的單擺（小角度擺動）週期變為 $\frac{1}{2}$ 倍
- (C) 地表上的彈簧振動（SHM）週期變為 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍
- (D) 地表上的某人重量變為 2 倍
- (E) 地表上的某人跳躍時，距離地面的高度變為 2 倍

解析

(A) 地表的重力場 $g = \frac{GM}{R^2} = \frac{G \times \frac{4}{3}\pi R^3 \times \rho}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G \rho R$ ，因地球的密度不變，故當半徑變為 2 倍時，重力加速度也變 2 倍；

(B) 單擺的週期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ ，由(A)可知 g 變為 2 倍，故週期變為 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍；

(C) 彈簧震動的週期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ ，故週期不變；

(D) 地表上某人的重量 $W = mg$ ，因 g 變為 2 倍，故重量也會變為 2 倍；

(E) 某人的跳躍可包含鉛直向上跳起與斜向上跳起，故由

$$v^2 = v_0^2 - 2gh \Rightarrow 0 = (v_0 \sin \theta)^2 - 2gh \Rightarrow h = \frac{(v_0 \sin \theta)^2}{2g}$$

因 g 變為 2 倍，故最大高度變為 $\frac{1}{2}$ 倍。

3. (A;B;C;E)

人造衛星繞地球運轉時所需的向心力，即為地球施於衛星的萬有引力，假設 G 為萬有引力常數， M 為地球的質量， R 為衛星的軌道半徑，則由此條件可以導出的正確結果為下列哪些選項？

(A) 衛星的速率 $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$

(B) 衛星的週期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$

(C) 克卜勒行星運動第三定律 $\frac{T^2}{R^3} = \text{定值}$

(D) $\rho T^2 = \text{定值}$ ，其中 ρ 為地球的密度，而此式適合用於任何軌道間

(E) 若衛星的角速度為 ω ，則地球的質量 $M = \frac{R^3 \omega^2}{G}$

解析

(A)(B) 人造衛星所受的萬有引力提供其作為繞行地球的向心力，故

$$\frac{GMm}{R^2} = m \frac{v^2}{R} = m \frac{4\pi^2 R}{T^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}}, T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}};$$

(C) 由(B)可知： $\frac{GMm}{R^2} = m \frac{4\pi^2 R}{T^2} \Rightarrow \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{定值}$ ；

(D) 由(C)可知： $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \frac{4\pi^2}{G \times \frac{4}{3}\pi R_{\text{地}}^3 \times \rho} = \text{定值}$ ，

故只有當衛星的軌道半徑與地球半徑相近時，此式才可適用；

(E) 因人造衛星所受的萬有引力提供其作為繞行地球的向心力，

故可列式得： $\frac{GMm}{R^2} = mR\omega^2$ ，所以地球的質量 $M = \frac{R^3\omega^2}{G}$

4. (A;C)

所謂的同步衛星是指衛星相對地面而言靜止不動，猶如懸在空中一樣，所以同步衛星的角速度和地球自轉的角速度相同；則下列相關的敘述，哪些正確？

- (A) 同步衛星的高度和速率是固定的
- (B) 同步衛星的高度和速率是可以選擇的，只要維持角速度與地球自轉的角速度相同即可
- (C) 同步衛星在地球上空的緯度只可能是零度，即只能在赤道上空
- (D) 同步衛星在地球上空的緯度是可以選擇的，只要維持角速度與地球自轉的角速度相同即可
- (E) 同步衛星上的物體處於失重狀態，所以不會受到地球的引力作用

解析

(A)(B) 同步衛星所受地球的萬有引力提供其作為繞行地球的向心力，故： $\frac{GMm}{R^2} = m \frac{4\pi^2 R}{T^2}$ ，

$$\text{推得週期 } T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}},$$

因其週期與地球相同，故其高度也是固定的；

又由 $v = R\omega$ 可判斷，因衛星的角速度 ω 與地球的角速度相同，

所以速率 v 也是固定的；

(C)(D) 同步衛星的公轉週期等於地球的自轉週期，且其公轉面必須通過地球的中心，而只有位於地球赤道上的位置才是繞地球的中心作圓周運動，故同步衛星只能在赤道上空；

(E) 同步衛星上的物體仍會受到地球的引力作用，
只是該引力作為衛星運行的向心力，故會有失重狀態。

5. (A;C;D;E)

人造衛星在愈高的地方飛行時，其下列哪幾種物理量會愈小？

- (A) 速率 (B) 週期 (C) 向心加速度 (D) 所受的引力 (E) 繞行地球的頻率

解析

(A) 由 $\frac{GMm}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ ，故人造衛星飛行的高度愈高，其速率愈小；

(B) 由 $\frac{GMm}{R^2} = m\frac{4\pi^2 R}{T^2} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$ ，故人造衛星飛行的高度愈高，其週期愈大；

(C) 人造衛星所受的萬有引力提供其作為運行時的向心力，故可列得：

$$\frac{GMm}{R^2} = ma_c \Rightarrow a_c = \frac{GM}{R^2}，$$

所以人造衛星飛行的高度愈高，其向心加速度愈小；

(D) 人造衛星所受的萬有引力為 $F = \frac{GMm}{R^2}$ ，

所以人造衛星飛行的高度愈高，其所受的引力愈小；

(E) 人造衛星的週期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$ ，又頻率 $f = \frac{1}{T}$ ，故人造衛星飛行的高度愈高，其繞行地球的頻率愈小。