段考錦囊

年級：高中二年級

範圍：下學期第一次段考

科目：數學

寰宇知識科技股份有限公司．有著作權．請勿侵害

重點整理

寰宇知識科技股份有限公司．有著作權．請勿侵害

一、一分鐘準備段考

- 基本定義和題型要「熟」，不是只要「會」
- 解出一題難題勝過解十題簡單的題目，不要逃避不會的題目
- 多做題目，培養對題型的解題感覺
- 利用名師學院系列產品，反覆觀看、補強弱點

二、重點回顧

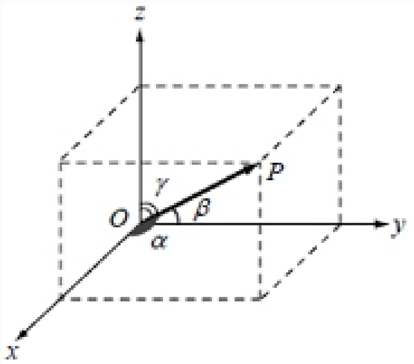
空間向量

1. 空間中兩直線 L_1 、L_2 的關係有三種：
   - 在同一平面上且二直線平行
   - 在同一平面上且二直線相交
   - 不在同一平面， 即兩直線歪斜
2. 空間中決定一個平面的條件：
   - 不共線的三點
   - 一直線與其線外一點
   - 相交的兩直線
   - 兩平行直線
3. 空間中一直線與平面的關係：
   - 直線與平面平行（沒有交點）
   - 直線與平面交於一點（一個交點）
   - 直線與平面重合（無限多個交點）
4. 若空間中直線 L 與平面 E 互相垂直， 則：
   - 過平面 E 上一定點 P 且垂直 L 的直線有無限多條。
   - 所有這些直線構成平面 E 。
5. 設 $A(x_1，y_1，z_1)$、$B(x_2，y_2，z_2)$為空間坐標戲中的兩點，則：
   - $\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$
   - $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

寰宇知識科技股份有限公司．有著作權．請勿侵害

6. 設 α、β、γ 為空間向量 $\overrightarrow{OP}$ 的方向角， 則：

- $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$
- $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$



7. 設 $\vec{u}=(a_1,a_2,a_3)$ 、$\vec{v}=(b_1,b_2,b_3)$ 為空間中的兩向量，則

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

8. 空間中二向量 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 所張成的

$$\Delta OAB\text{ 面積}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overline{OA}|^2\,|\overline{OB}|^2-(\overline{OA}\cdot\overline{OB})^2}$$

9. 設 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 為空間中的兩向量，θ 為 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 之夾角， 則：

- $\vec{a}\text{ 在 }\vec{b}\text{ 上之正射影長}=\|\vec{a}|\times\cos\theta|=\|\vec{a}|\times\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\times|\vec{b}|}|=|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}|$
- $\vec{a}\text{ 在 }\vec{b}\text{ 上之正射影量}=|\vec{a}|\times\cos\theta=|\vec{a}|\times\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\times|\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$
- $\vec{a}\text{ 在 }\vec{b}\text{ 上之正射影}=(|\vec{a}|\times\cos\theta)\times(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|})=(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2})\times\vec{b}$

10. 柯西不等式：

設 $\vec{u}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{v}=(b_1,b_2,b_3)$ 為空間中的兩向量， 則：

- $(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$

寰宇知識科技股份有限公司．有著作權．請勿侵害

- 等號成立的充要條件為 $\vec{u}=(a_1,a_2,a_3)$ 與 $\vec{v}=(b_1,b_2,b_3)$ 平行

11. $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 為空間中已知向量

$$\Rightarrow \vec{N}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$ 為 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的一組公垂向量

12. 空間中兩向量 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 與 $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，則：

- $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的外積(Cross)定義為 $\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$
- $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所張成的平行四邊形面積

$$S=|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}$$

13. 設空間向量 $\overline{OA}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overline{OB}=(b_1,b_2,b_3)$，$\overline{OC}=(c_1,c_2,c_3)$，則

$\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$ 所張成的平行六面體體積 $=\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right|$

14. 三元一次聯立方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ 的 x、y、z 滿足 $\begin{cases} \Delta\cdot x=\Delta_x \\ \Delta\cdot y=\Delta_y \\ \Delta\cdot z=\Delta_z \end{cases}$，其中

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$，且：

- 當 $\Delta\neq 0$ = 0 時，(x,y,z) 恰有一組解 $\left(\frac{\Delta_x}{\Delta},\frac{\Delta_y}{\Delta},\frac{\Delta_z}{\Delta}\right)$。
- 當 $\Delta=0$ 且 Δ_x、Δ_y、Δ_z 有一不為 0 時，無解。
- 當 $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ 時，可能無解，也可能無限多解。

➢ 空間中的平面與直線

1. 過點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 且法向量為 $\overrightarrow{N}=(a,b,c)$ 之平面方程式可表示為

   $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

2. 平面 E 通過三點 $A(a,0,0)$、$B(0,b,0)$、$C(0,0,c)$ 其中 a、b、c 皆不為 0，則：

   - 平面 E 之 x 軸的截距為 a , y 軸的截距為 b , z 軸的截距為 c 。
   - 平面 E 的方程式可表為 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$,其法向量為 $(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c})$

3. 空間中，點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 E ：ax + by + cz + d = 0 的距離

   $d(P,E)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ （即 $\frac{|\text{點代入}|}{\text{法向量長}}$ ）

4. 空間中兩平行面 E_1 ： $ax+by+cz+d_1=0$ 與 E_2 ： $ax+by+cz+d_2=0$ 的距離為 $\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

5. 空間中，直線 L 通過定點 $A(\alpha,\beta,\gamma)$ 且與向量 (ℓ,m,n) 平行，則：

   - (ℓ,m,n) 稱為直線的方向向量。
   - L 可表為 $\frac{x-\alpha}{\ell}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}$ ，稱為直線L的對稱比例式, 簡稱比例式。
   - L 可表為 $\begin{cases} x=\alpha+\ell t \\ y=\beta+mt \\ z=\gamma+nt \end{cases}$ （其中 $t\in R$ ）, 稱為直線L的參數式。

6. 直線 L 的二面式：

   空間中，直線 L 若為二平面 E_1 與 E_2 的交線，則 L 可表為這兩個平面的聯立方程式，此聯立方程式稱為直線 L 的二面式。

如：空間中, x 軸的二面式為 $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$

7. 設空間中二直線 L_1 、L_2 的方向向量分別為 (a_1,b_1,c_1) 、(a_2,b_2,c_2), 若不存在實數 k 使得 $(a_1,b_1,c_1)=k(a_2,b_2,c_2)$, 即, L_1 、L_2 不平行, 則 L_1 與 L_2 必相交或歪斜。

8. 空間中一直線與平面的關係：
   - 平行（沒有交點）。
   - 交於一點（一個交點）。
   - 重合（無限多個交點）。

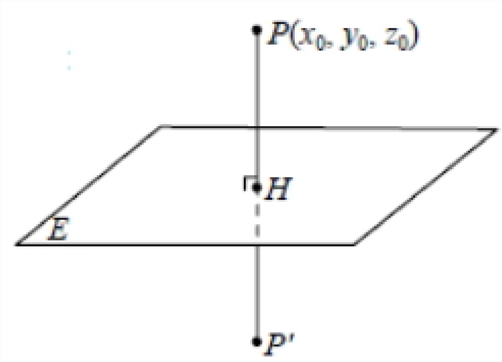
9. 設直線 L 的方向向量為 $\vec{L}$， 平面 E 的法向量為 $\vec{n}$：
   - 若 $\vec{n}\cdot\vec{L}=0$ ， 即 $\vec{n}\perp\vec{L}$ ， 則 L 與 E 平行或重合。
   - 若 $\vec{n}\cdot\vec{L}\neq 0$， 即 $\vec{n}$ 與 $\vec{L}$ 互不垂直， 則 L 與 E 相交（交於一點）。

10. 設 L_1 的方向向量為 $\overrightarrow{L_1}$, L_2 的方向向量為 $\overrightarrow{L_2}$ 。若 L_1 與 L_2 相交且交角為 θ，則 $\cos\theta=\pm\dfrac{\overrightarrow{L_1}\cdot\overrightarrow{L_2}}{|\overrightarrow{L_1}||\overrightarrow{L_2}|}$

11. 設 E_1 的法向量為 $\overrightarrow{N_1}$, E_2 的法向量為 $\overrightarrow{N_2}$ 。若 E_1 與 E_2 相交且交角為 θ , 則 $\cos\theta=\pm\dfrac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{|\overrightarrow{N_1}||\overrightarrow{N_2}|}$

12. 設 L 的方向向量為 $\vec{L}$, E 的法向量為 $\vec{N}$。若 L 與 E 相交且交角為 θ，則 $\cos\theta=\pm\sqrt{1-\left(\dfrac{\vec{N}\cdot\vec{L}}{|\vec{N}||\vec{L}|}\right)^2}$

13. 空間中有一點 $P(x_0, y_0, z_0)$與一平面E ：$ax+by+cz+d=0$，則：
投影點$H=(x_0+at,\ y_0+bt,\ z_0+ct)$
對稱點$P'=(x_0+2at,\ y_0+2bt,\ z_0+2ct)$
其中$t=\dfrac{-(ax_0+by_0+cz_0+d)}{a^2+b^2+c^2}$（即$\dfrac{-(\text{點代入})}{\text{係數平方和}}$）



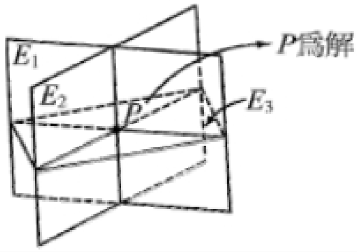
14. 過二平面E_1、E_2交線之所有平面 E 可設為 $E_1+kE_2=0$， 其中$k\in R$。

- 當 k = 0 時， 則 E = E_1。
- 當 k 不存在時， 則 E = E_2。

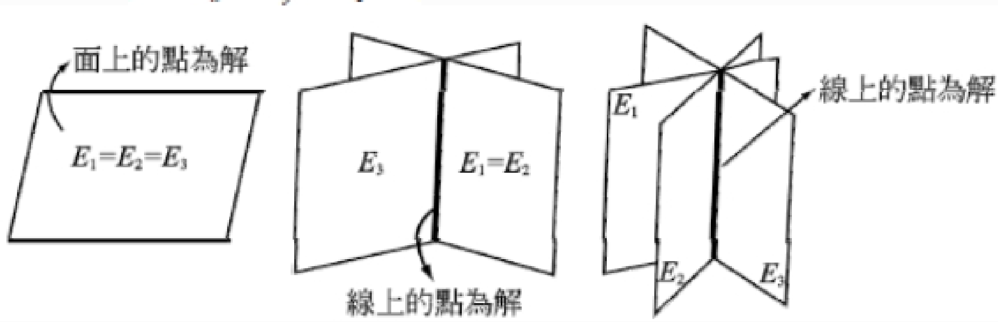
名師學院™ LEARNING SMART www.kut.com.tw

15. 在聯立方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ 中的每一個方程式在空間中皆代表一個平面, 其解 共有八種可能的幾何意義。

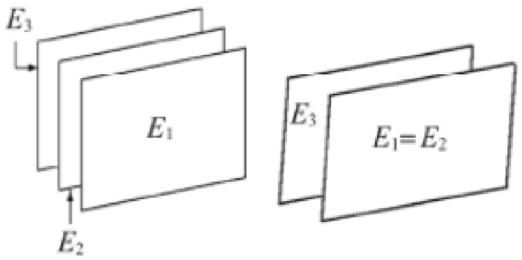
- 恰一組解($\Delta \neq 0$)：恰有一個點同時在三個平面上。

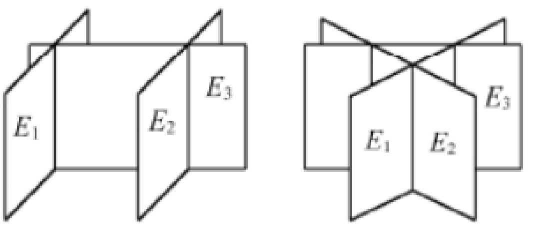


- 無限多解($\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$)：無限多個點同時在三個平面上。



- 無解($\Delta = 0$)：沒有任何一點可以同時在三個平面上。





寰宇知識科技股份有限公司．有著作權．請勿侵害

精選試卷及詳解

名師學院 LEARNING SMART www.kut.com.tw

考試日期僅供參考

高二數學下空間向量段考

範圍：	空間向量	考試日期：	2015/02/10
適用年級：	高中二年級	適用科目：	數學
題型：	單選題：14題　多選題：6題		

一、單選題

1.(　)

有關空間概念，下列敘述何者正確？

(A) 一直線L與不在L上的相異兩點A、B，則存在唯一平面E包含L與A、B兩點

(B) 三相異平面最多可以將空間分割成 7 個小空間

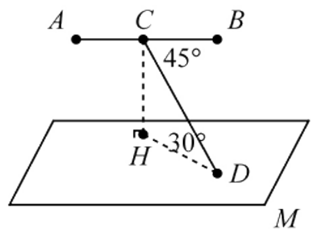
(C) 一直線L與兩平面E、F，$L\notin E$且$L\notin F$。若$L\not\perp F$且$E\not\perp F$，則$L // E$

(D) 一直線L與兩平面E、F，若$L\in F$且$L\not\perp E$，則$E\not\perp F$

(E) 點A與平面E，若$A\notin E$，則恰有一平面F包含A且與E平行

2.(　)

如右圖所示，已知$\overleftrightarrow{AB}$與平面M平行，自$\overleftrightarrow{AB}$上取一點C，C在M上的投影點為H，作$\overleftrightarrow{CD}$交平面M於D點。已知$\angle BCD=45^\circ$，$\angle CDH=30^\circ$。若平面N為$\overleftrightarrow{CD}$與$\overleftrightarrow{AB}$所決定的平面，求平面N與平面M所夾銳角的正弦值＝？



(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　(D) $\dfrac{1}{2}$　(E) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3.(　)

已知三直線L_1：$x+2y+(3-a)=0$、L_2：$x+(2-a)y+3=0$、L_3：$(1-a)x+2y+3=0$，若三直線L_1、L_2、L_3恰交於一點，則$a=$？

(A) 2　(B) 4　(C) 6　(D) 8　(E) 10

4.(　)

設x、y為實數，求$x^2+y^2+(2x-3y+4)^2$之最小值為何？

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) 0　(C) $\dfrac{3}{4}$　(D) $\dfrac{8}{7}$　(E) $\dfrac{11}{7}$

5.(　)

求行列式的值 $\begin{vmatrix} 2000 & 2001 & 2002 \\ 2005 & 2003 & 2004 \\ 2006 & 2007 & 2008 \end{vmatrix}$ 之值。

(A) 18　(B) 19　(C) 20　(D) 21　(E) 22

6.(　)

若$A(4,1,3)$、$B(6,3,4)$、$C(4,5,6)$，求$\angle BAC$的外角平分線與直線BC之交點坐標。

(A) $(7,5,4)$　(B) $(9,0,1)$　(C) $(6,2,3)$　(D) $(6,3,3)$　(E) $(7,3,2)$

7.(　)

空間三點$A(1,2,3)$、$B(2,4,5)$、$C(x,0,z)$，求ΔABC的周長最小＝？

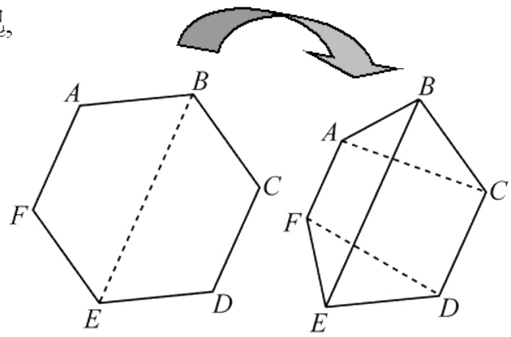
(A) $3+\sqrt{41}$　(B) 17　(C) $5+\sqrt{29}$　(D) 22　(E) 19

8.(　)

將一邊長為$2\sqrt{3}$的正六邊形$ABCDEF$沿對角線$\overline{BE}$摺起，如右圖所示，使得$\overline{AC}=\overline{FD}=\sqrt{6}$，若側面$ABEF$與底面$BCDE$所夾的兩面角為$\theta$，則$\cos\theta=$？

(A) $\frac{1}{2}$　(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(C) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(D) $\frac{3}{4}$　(E) $\frac{2}{3}$



9.(　)

已知三向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$所張出之平行六面體的體積為 5，求由三向量$\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$、$4\vec{b}+5\vec{c}$、$-\vec{b}+\vec{c}$所張出之平行六面體的體積＝？

(A) 36　(B) 49　(C) 56　(D) 45　(E) 21

10.(　)

設$\overrightarrow{AB}=(1,5,25)$、$\overrightarrow{AC}=(1,2,4)$、$\overrightarrow{AD}=(1,-8,64)$，試回答下列問題：

由$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$所張平行六面體體積＝？

(A) 480　(B) 385　(C) 390　(D) 290　(E) 120

11.(　)

承上題

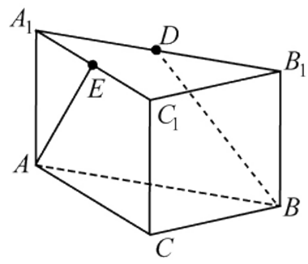
由$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$所張平行四邊形面積＝？

(A) $30\sqrt{2}$　(B) 30　(C) $15\sqrt{2}$　(D) $15\sqrt{6}$　(E) $30\sqrt{6}$

12.(　)

如右圖所示，$A_1B_1C_1-ABC$ 是直三角柱，$\angle BCA=90^\circ$，點 D、E 分別為 $\overline{A_1B_1}$、$\overline{A_1C_1}$ 的中點，若 $\overline{BC}=\overline{CA}=\overline{CC_1}$，則 $\overrightarrow{DB}$ 與 $\overrightarrow{EA}$ 所成角的餘弦值＝？

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(C) $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$　(D) $\dfrac{1}{2}$　(E) $\sqrt{\dfrac{3}{10}}$



13.(　)

已知空間中三點 $P(1,-1,2)$、$Q(-1,-2,0)$、$R(-3,1,1)$，求 $\overrightarrow{PR}$ 在 $\overrightarrow{PQ}$ 上的正射影＝？

(A) $(-\dfrac{16}{9},-\dfrac{8}{9},-\dfrac{16}{9})$　(B) $(\dfrac{16}{9},-\dfrac{8}{9},\dfrac{16}{9})$　(C) $(\dfrac{16}{9},-\dfrac{8}{9},-\dfrac{16}{9})$

(D) $(-\dfrac{16}{9},\dfrac{8}{9},-\dfrac{16}{9})$　(E) $(-\dfrac{16}{9},-\dfrac{8}{9},\dfrac{16}{9})$

14.(　)

若 $A(1,-1,1)$、$B(2,0,2)$、$C(2,0,-1)$，求 ΔABC 的面積＝？

(A) $\sqrt{2}$　(B) $\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(D) $\dfrac{5}{2}$　(E) $\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$

二、多選題

15.(　)

在空間中，下列敘述何者恆真？

(A) 平行於同一平面之兩相異直線必互相平行

(B) 垂直於同一直線之兩相異直線必互相平行

(C) 兩歪斜線恰有一條公垂線

(D) 若二直線 AB 與直線 CD 歪斜，則二直線 AC 與直線 BD 亦歪斜

(E) 若三平面兩兩相交於三相異直線，則此三直線共點或互相平行

16.(　)

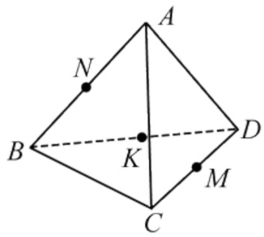
設 x、y 為任意實數，試問下列哪些選項中的行列式值與行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的值相等？

(A) $\begin{vmatrix} -1 & x & y \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix}$　(B) $\begin{vmatrix} b & 0 & a \\ d & 0 & c \\ x & -1 & y \end{vmatrix}$　(C) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & c & 0 \\ b & d & 0 \end{vmatrix}$

(D) $\begin{vmatrix} a & x & \frac{b}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ c & y & \frac{d}{2} \end{vmatrix}$　(E) $\begin{vmatrix} a-3b & b & x+a \\ c-3d & d & y+c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

17.(　)

如右圖，正四面體 $ABCD$ 邊長為 2，K、M、N 各為 $\overline{BD}$、$\overline{CD}$、$\overline{AB}$ 之中點，下列敘述何者正確？



(A) $\overline{MN} \perp \overline{AB}$　(B) $\overline{MN} = \sqrt{2}$　(C) $\angle NKM = 120°$

(D) 平面 ABC 與平面 ACD 之兩面角為 φ，則 $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(E) 承(D)，$\angle AMB = \varphi$

18.(　)

下列哪些向量與 $\vec{a} \times \vec{b}$ 垂直？

(A) $\vec{a}$　(B) $3\vec{a}$　(C) $\vec{a}-\vec{b}$　(D) $5\vec{b}-4\vec{a}$　(E) $\vec{b}\times\vec{a}$

19.(　)

已知 $\vec{n}$ 與兩向量 $\vec{a}=(1,-1,0)$、$\vec{b}=(3,3,-4)$ 均垂直，且 $|\vec{n}|=\sqrt{34}$，試回答下列問題：

$\vec{n}$ 值可能為何？

(A) $\vec{n}=(-1,-1,2)$　(B) $\vec{n}=(3,4,-5)$　(C) $\vec{n}=(-3,-4,5)$

(D) $\vec{n}=(-\frac{4}{\sqrt{2}},-\frac{4}{\sqrt{2}},-\frac{6}{\sqrt{2}})$　(E) $\vec{n}=(\frac{4}{\sqrt{2}},\frac{4}{\sqrt{2}},\frac{6}{\sqrt{2}})$

20.(　)

承上題

由 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所張出之平行四邊形的面積為何？

(A) 9　(B) $8\sqrt{2}$　(C) $8\sqrt{2}$　(D) $\sqrt{34}$　(E) $\sqrt{68}$

高二數學下空間向量段考

範圍：　　空間向量　　　　　　　　　　考試日期：　2015/02/10
適用年級：　高中二年級　　　　　　　　適用科目：　數學

題型：　　單選題：14題　多選題：6題

一、單選題

1.(E)

有關空間概念, 下列敘述何者正確？

(A) 一直線L與不在L上的相異兩點A、B, 則存在唯一平面E包含L與A、B兩點

(B) 三相異平面最多可以將空間分割成 7 個小空間

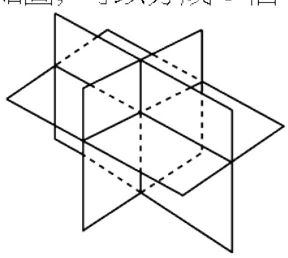
(C) 一直線L與兩平面E、F, $L \notin E$ 且$L \notin F$。若$L \not\perp F$ 且 $E \not\perp F$, 則$L // E$

(D) 一直線L與兩平面E、F, 若$L \in F$ 且$L \not\perp E$, 則 $E \not\perp F$

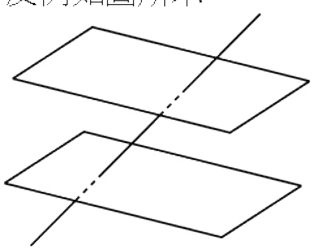
(E) 點A與平面E, 若$A \notin E$, 則恰有一平面F包含A且與E平行

解析

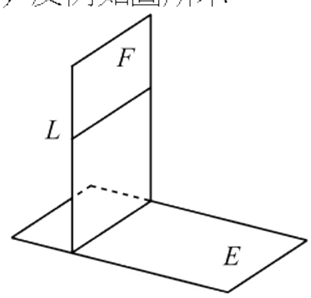
(A) AB與直線L的方向向量平行時, 才有一平面E包含L與A、B兩點
(B) 如圖, 可以分成 8 個小空間



(C) 反例如圖所示

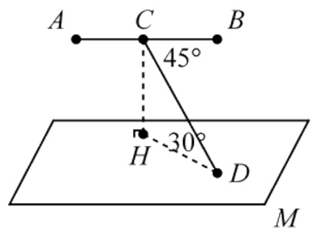


(D) 反例如圖所示



(E) 正確
故選(E)

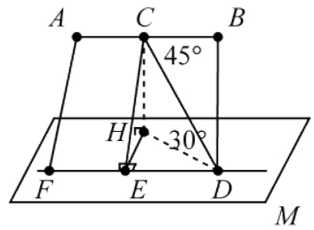
2.(E)



如右圖所示，已知$\overleftrightarrow{AB}$與平面M平行，自$\overleftrightarrow{AB}$上取一點C，C在M上的投影點為H，作$\overleftrightarrow{CD}$交平面M於D點。已知$\angle BCD=45^\circ$，$\angle CDH=30^\circ$。若平面N為$\overleftrightarrow{CD}$與$\overleftrightarrow{AB}$所決定的平面，求平面N與平面M所夾銳角的正弦值＝？

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (D) $\dfrac{1}{2}$ (E) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解析



過D作$\overleftrightarrow{DF}$平行$\overleftrightarrow{AB}$，則平面$ABDF$即$\overleftrightarrow{CD}$與$\overleftrightarrow{AB}$所決定的平面，因此$\angle BCD=\angle CDE=45^\circ$；過$H$點對$\overleftrightarrow{DF}$做垂線，垂足為$E$。因為$\overline{CH}\perp$平面$M$且$\overline{HE}\perp\overleftrightarrow{DF}$，因此根據三垂線定理$\overline{CE}\perp\overleftrightarrow{DF}$。

所以$\angle CEH$為平面角。令$\angle CEH=\theta$，

$\because \overline{CD}\sin\angle CDE=\overline{CE}$，$\overline{CE}\sin\theta=\overline{CH}\Rightarrow\overline{CD}\sin\angle CDE\sin\theta=\overline{CH}$

且$\overline{CD}\sin\angle CDH=\overline{CH}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\overline{CD}\sin 45^\circ\sin\theta=\overline{CH}\\ \overline{CD}\sin 30^\circ=\overline{CH}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\overline{CD}\sin 45^\circ\sin\theta=\overline{CD}\sin 30^\circ$$

$$\Rightarrow\sin\theta=\frac{\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

故選(E)

3.(C)

已知三直線L_1：$x+2y+(3-a)=0$、L_2：$x+(2-a)y+3=0$、L_3：$(1-a)x+2y+3=0$，若三直線L_1、L_2、L_3恰交於一點，則$a=$？

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 10

解析

$x+2y+(3-a)=0 \Rightarrow x+2y=-(3-a)$
$x+(2-a)y+3=0 \Rightarrow x+(2-a)y=-3$
$(1-a)x+2y+3=0 \Rightarrow (1-a)x+2y=-3$
（法一）

平面上三線共點$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -(3-a) \\ 1 & 2-a & -3 \\ 1-a & 2 & -3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3+a \\ 1 & 2-a & -3 \\ 1-a & 2 & -3 \end{vmatrix}=0$

若$a=0$，則$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3+a \\ 1 & 2-a & -3 \\ 1-a & 2 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=0$成立

但三線重合成一線，與題意不符，故$a \neq 0$

將$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3+a \\ 1 & 2-a & -3 \\ 1-a & 2 & -3 \end{vmatrix}=0$的第二行和第三行加到第一行

$\Rightarrow \begin{vmatrix} a & 2 & -3+a \\ -a & 2-a & -3 \\ -a & 2 & -3 \end{vmatrix}=0$，將第一行提出$a$

$\Rightarrow a\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3+a \\ -1 & 2-a & -3 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=0$，利用降次法

$\Rightarrow a\cdot(1\cdot\begin{vmatrix} 2-a & -3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}-(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3+a \\ 2 & -3 \end{vmatrix}+(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3+a \\ 2-a & -3 \end{vmatrix})=0$

$\Rightarrow a\cdot(6a-a^2)=a^2(6-a)=0$
$\Rightarrow a=0$（不合）或 6
故$a=6$

（法二）
先解出L_1、L_2的交點，再代回L_3將a解出

$\begin{cases} x+2y=-(3-a)\cdots\cdots① \\ x+(2-a)y=-3\cdots\cdots② \end{cases}$

將①－②得$ay=a \Rightarrow y=1$
將$y=1$代回②得$x=-3-(2-a)=a-5$
將$x=a-5$代回L_3可得$(1-a)(a-5)+2\cdot1+3=0$
$\Rightarrow a^2-6a+5-5=0$
$\Rightarrow a(a-6)=0$
$\Rightarrow a=0$或 6
若$a=0$則$L_1=L_2=L_3$不合，故$a=6$

4.(D)
設x、y爲實數，求$x^2+y^2+(2x-3y+4)^2$之最小值爲何？
(A) $\frac{1}{2}$ (B) 0 (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{8}{7}$ (E) $\frac{11}{7}$

解析

利用柯西不等式：

$$[x^2+y^2+(2x-3y+4)^2]\cdot[(-2)^2+(3)^2+1]\ge[(-2x)+(3y)+(2x-3y+4)]^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+(2x-3y+4)^2\ge\frac{16}{14}=\frac{8}{7}$$

等號成立的條件：$\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{2x-3y+4}{1}$

令 $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{2x-3y+4}{1}=k\Rightarrow x=-2k,\ y=3k,\ 2x-3y+4=k$

將 $x=-2k,\ y=3k$ 代入 $2x-3y+4=k\Rightarrow -4k-9k+4=k\Rightarrow k=\dfrac{2}{7}$

$k=\dfrac{2}{7}\Rightarrow x=-2k=-\dfrac{4}{7},\ y=3k=\dfrac{6}{7}$ 有解

因此，當 $x=-\dfrac{4}{7},\ y=\dfrac{6}{7}$ 時，$x^2+y^2+(2x-3y+4)^2$ 有最小值 $\dfrac{8}{7}$

故選(D)

5.(A)

求行列式的值 $\begin{vmatrix}2000 & 2001 & 2002\\ 2005 & 2003 & 2004\\ 2006 & 2007 & 2008\end{vmatrix}$ 之值。

(A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 21 (E) 22

解析

$$\begin{vmatrix}2000 & 2001 & 2002\\ 2005 & 2003 & 2004\\ 2006 & 2007 & 2008\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2000 & 2001 & 1\\ 2005 & 2003 & 1\\ 2006 & 2007 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2000 & 2001 & 1\\ 5 & 2 & 0\\ 6 & 6 & 0\end{vmatrix}$$

$\times(-1)$ $\times(-1)$

$$=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5 & 2\\ 6 & 6\end{vmatrix}=30-12=18$$

故選(A)

6.(B)

若 $A(4,1,3)$、$B(6,3,4)$、$C(4,5,6)$，求 $\angle BAC$ 的外角平分線與直線 BC 之交點坐標。

(A) $(7,5,4)$ (B) $(9,0,1)$ (C) $(6,2,3)$ (D) $(6,3,3)$ (E) $(7,3,2)$

解析

設外角平分線與直線 BC 之交點為 D

$\overline{AB}=\sqrt{(6-4)^2+(3-1)^2+(4-3)^2}=3,\ \overline{AC}=\sqrt{(4-4)^2+(5-1)^2+(6-3)^2}=5$

$\because \overline{BD}:\overline{DC}=\overline{BA}:\overline{AC}=3:5$, 且 D 為外分點

$\therefore \overrightarrow{OD}=\dfrac{5\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}}{5-3}=(\dfrac{5\cdot6-3\cdot4}{5-3},\dfrac{5\cdot3-3\cdot5}{5-3},\dfrac{5\cdot4-3\cdot6}{5-3})=(9,0,1)$

因此 D 點坐標為 $(9,0,1)$

故選(B)

7.(A)

空間三點 $A(1,2,3)$、$B(2,4,5)$、$C(x,0,z)$, 求 ΔABC 的周長最小 = ?

(A) $3+\sqrt{41}$ (B) 17 (C) $5+\sqrt{29}$ (D) 22 (E) 19

解析

令 D 為所有可能的 C 點所形成的集合

$\because C(x,0,z)$ 的 y 坐標為 0　$\therefore$ 則 D 為 xz 平面

$\because A(1,2,3)$ 與 $B(2,4,5)$ 的 y 坐標皆為正　$\therefore$ 兩點在 xz 平面的同側

令 B' 為 B 點對 xz 平面所形成的對稱點, 則 $B'=(2,-4,5)$

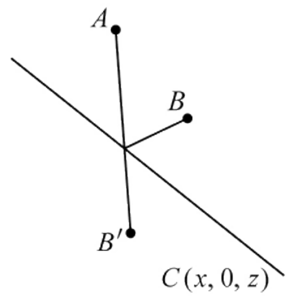
$\overline{AC}+\overline{CB}$ 最小發生在 A、C、B' 三點共線的時候, 長度為

$\sqrt{(2-1)^2+(-4-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{1+36+4}=\sqrt{41}$

又 $\overline{AB}=\sqrt{(2-1)^2+(4-2)^2+(5-3)^2}=3$

因此 ΔABC 的周長最小為 $3+\sqrt{41}$

故選(A)

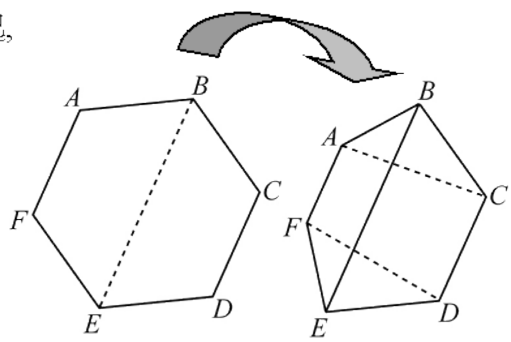


8.(E)

將一邊長為 $2\sqrt{3}$ 的正六邊形 $ABCDEF$ 沿對角線 $\overline{BE}$ 摺起, 如右圖所示, 使得 $\overline{AC}=\overline{FD}=\sqrt{6}$, 若側面 $ABEF$ 與底面 $BCDE$ 所夾的兩面角為 θ, 則 $\cos\theta=$?

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(D) $\dfrac{3}{4}$ (E) $\dfrac{2}{3}$



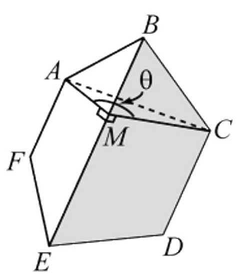
解析

由於側面 $ABEF$ 與底面 $CBED$ 全等, 因此分別沿著 A 點和 C 點對 $\overline{BE}$ 作垂線會交於同一點 M, 則

$\overline{AM}=\overline{CM}=\overline{AB}\cdot\sin\angle ABM=2\sqrt{3}\cdot\sin60^\circ=3$

$\cos\theta=\dfrac{\overline{AM}^2+\overline{CM}^2-\overline{AC}^2}{2\cdot\overline{AM}\cdot\overline{CM}}=\dfrac{9+9-6}{2\cdot3\cdot3}=\dfrac{12}{18}=\dfrac{2}{3}$

故選(E)



9. (D)

已知三向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$所張出之平行六面體的體積為 5，求由三向量$\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$、$4\vec{b}+5\vec{c}$、$-\vec{b}+\vec{c}$所張出之平行六面體的體積＝？

(A) 36 (B) 49 (C) 56 (D) 45 (E) 21

解析

設$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$

則三向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$所張出之平行六面體的體積為$\left|\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}\right|=5$，簡記為$\left|\begin{vmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{vmatrix}\right|=5$

$$\begin{vmatrix} \vec{a}+2\vec{b}-\vec{c} \\ 4\vec{b}+5\vec{c} \\ -\vec{b}+\vec{c} \end{vmatrix} \times 4 = \begin{vmatrix} \vec{a}+2\vec{b}-\vec{c} \\ 9\vec{c} \\ -\vec{b}+\vec{c} \end{vmatrix} \times\left(-\tfrac{1}{9}\right) = \begin{vmatrix} \vec{a}+2\vec{b}-\vec{c} \\ 9\vec{c} \\ -\vec{b} \end{vmatrix} \times\tfrac{1}{9} \ \times 2 = \begin{vmatrix} \vec{a} \\ 9\vec{c} \\ -\vec{b} \end{vmatrix}$$

$$=(-9)\begin{vmatrix} \vec{a} \\ \vec{c} \\ \vec{b} \end{vmatrix}=(-9)\cdot(-1)\begin{vmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{vmatrix}=9\cdot\begin{vmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \left|\begin{vmatrix} \vec{a}+2\vec{b}-\vec{c} \\ 4\vec{b}+5\vec{c} \\ -\vec{b}+\vec{c} \end{vmatrix}\right|=9\cdot\left|\begin{vmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{vmatrix}\right|=9\cdot 5=45$$

故選(D)

10. (C)

設$\overrightarrow{AB}=(1,5,25)$、$\overrightarrow{AC}=(1,2,4)$、$\overrightarrow{AD}=(1,-8,64)$，試回答下列問題：

由$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$所張平行六面體體積＝？

(A) 480 (B) 385 (C) 390 (D) 290 (E) 120

解析

$$\left|\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -8 & 64 \end{vmatrix}\right|=\left|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -8 \\ 25 & 4 & 64 \end{vmatrix}\right|=|(-8-2)\cdot(-8-5)\cdot(2-5)|=390$$

故選(C)

11. (D)

承上題

由$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$所張平行四邊形面積＝？

(A) $30\sqrt{2}$ (B) 30 (C) $15\sqrt{2}$ (D) $15\sqrt{6}$ (E) $30\sqrt{6}$

解析

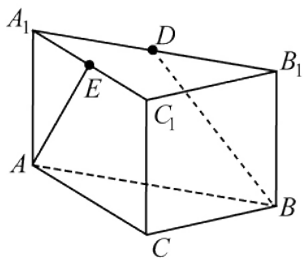
$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(\begin{vmatrix}5&25\\2&4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}25&1\\4&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&5\\1&2\end{vmatrix})$

$$\Rightarrow\sqrt{\begin{vmatrix}5&25\\2&4\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}25&1\\4&1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1&5\\1&2\end{vmatrix}^2}=\sqrt{900+441+9}=\sqrt{1350}=15\sqrt{6}$$

故選(D)

12. (E)

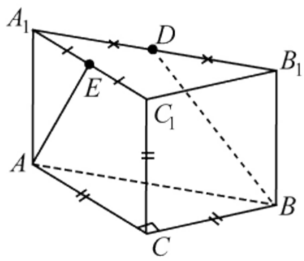
如右圖所示，$A_1B_1C_1-ABC$ 是直三角柱，$\angle BCA=90°$，點 D 、E 分別爲 $\overline{A_1B_1}$ 、$\overline{A_1C_1}$ 的中點，若 $\overline{BC}=\overline{CA}=\overline{CC_1}$，則 $\overline{DB}$ 與 $\overline{EA}$ 所成角的餘弦值＝？



(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$ (D) $\dfrac{1}{2}$ (E) $\sqrt{\dfrac{3}{10}}$

解析

令 $\overline{BC}=\overline{CA}=\overline{CC_1}=r$



$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB_1}+\overrightarrow{B_1B},\ \overrightarrow{EA}=\overrightarrow{EA_1}+\overrightarrow{A_1A}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{EA}&=(\overrightarrow{DB_1}+\overrightarrow{B_1B})\cdot(\overrightarrow{EA_1}+\overrightarrow{A_1A})\\&=\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{EA_1}+\underbrace{\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{A_1A}}_{\text{內積爲 0}}+\underbrace{\overrightarrow{B_1B}\cdot\overrightarrow{EA_1}}_{\text{內積爲 0}}+\overrightarrow{B_1B}\cdot\overrightarrow{A_1A}\\&=\overrightarrow{DB_1}\cdot(-\overrightarrow{A_1E})+\overrightarrow{B_1B}\cdot\overrightarrow{A_1A}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}r\cdot(-\frac{r}{2})\cdot\cos45°+r\cdot r\cdot\cos0\\&=-\frac{r^2}{4}+r^2=\frac{3}{4}r^2\end{aligned}$$

$\overline{DB_1}=\dfrac{1}{2}\overline{A_1B_1}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\overline{A_1C_1}^2+\overline{C_1B_1}^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{r^2+r^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}r$，

$\overline{DB}=\sqrt{\overline{DB_1}^2+\overline{B_1B}^2}=\sqrt{\dfrac{1}{2}r^2+r^2}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}r$，$\overline{EA}=\sqrt{\overline{EA_1}^2+\overline{A_1A}^2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}r^2+r^2}=\sqrt{\dfrac{5}{4}}r$

又 $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{EA}=\overline{DB}\cdot\overline{EA}\cdot\cos\theta=\sqrt{\dfrac{3}{2}}r\cdot\sqrt{\dfrac{5}{4}}r\cdot\cos\theta=\sqrt{\dfrac{15}{8}}r^2\cos\theta$

$$\therefore\cos\theta=\frac{\frac{3}{4}r^2}{\sqrt{\frac{15}{8}}r^2}=\sqrt{\frac{72}{240}}=\sqrt{\frac{3}{10}}$$

故選(E)

13.(A)

已知空間中三點$P(1,-1,2)$、$Q(-1,-2,0)$、$R(-3,1,1)$, 求$\overline{PR}$在$\overline{PQ}$上的正射影＝？

(A) $(-\frac{16}{9},-\frac{8}{9},-\frac{16}{9})$ (B) $(\frac{16}{9},-\frac{8}{9},\frac{16}{9})$ (C) $(\frac{16}{9},-\frac{8}{9},-\frac{16}{9})$

(D) $(-\frac{16}{9},\frac{8}{9},-\frac{16}{9})$ (E) $(-\frac{16}{9},-\frac{8}{9},\frac{16}{9})$

解析

$\overrightarrow{PR}=(-3-1,1-(-1),1-2)=(-4,2,-1)$, $\overrightarrow{PQ}=(-1-1,-2-(-1),0-2)=(-2,-1,-2)$

$$\Rightarrow \overline{PR}\text{在}\overline{PQ}\text{上的正射影}=(\frac{\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|})\cdot\frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|}=\frac{\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|^2}\cdot\overrightarrow{PQ}$$

$$=\frac{(-4)\cdot(-2)+2\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2)}{9}\cdot(-2,-1,-2)$$

$$=(-\frac{16}{9},-\frac{8}{9},-\frac{16}{9})$$

故選(A)

14.(B)

若$A(1,-1,1)$、$B(2,0,2)$、$C(2,0,-1)$, 求ΔABC的面積＝？

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{5}{2}$ (E) $\frac{5}{2}\sqrt{3}$

解析

$\overrightarrow{AB}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{AC}=(1,1,-2)$

$$\Delta ABC\text{的面積}=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}1&1\\1&-2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1&1\\-2&1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{9+9+0}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

故選(B)

二、多選題

15.(C;D;E)

在空間中, 下列敘述何者恆真？

(A) 平行於同一平面之兩相異直線必互相平行

(B) 垂直於同一直線之兩相異直線必互相平行

(C) 兩歪斜線恰有一條公垂線

(D) 若二直線AB與直線CD歪斜, 則二直線AC與直線BD亦歪斜

(E) 若三平面兩兩相交於三相異直線, 則此三直線共點或互相平行

解析

(A) 平行於同一平面之兩相異直線可能為歪斜線
(B) 垂直於同一直線之兩相異直線可能為歪斜線
(C) 正確
(D) 二直線AB與直線CD歪斜，因此A、B、C、D四點不共平面
若直線AC與直線BD平行或相交，則四點共平面，矛盾
故直線AC與直線BD不平行且不相交，即此二直線歪斜 $\therefore$正確
(E) 正確
故選(C)(D)(E)

16.(C;D;E)

設x、y為任意實數，試問下列哪些選項中的行列式值與行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$的值相等？

(A) $\begin{vmatrix} -1 & x & y \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix}$ (B) $\begin{vmatrix} b & 0 & a \\ d & 0 & c \\ x & -1 & y \end{vmatrix}$ (C) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & c & 0 \\ b & d & 0 \end{vmatrix}$

(D) $\begin{vmatrix} a & x & \frac{b}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ c & y & \frac{d}{2} \end{vmatrix}$ (E) $\begin{vmatrix} a-3b & b & x+a \\ c-3d & d & y+c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

解析

(A) $\begin{vmatrix} -1 & x & y \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

(B) $\begin{vmatrix} b & 0 & a \\ d & 0 & c \\ x & -1 & y \end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

(C) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & c & 0 \\ b & d & 0 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

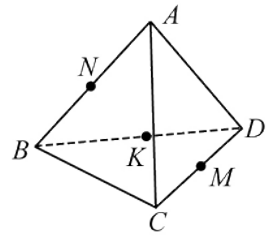
(D) $\begin{vmatrix} a & x & \frac{b}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ c & y & \frac{d}{2} \end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ c & \frac{d}{2} \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ c & \frac{d}{2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

(E) $\begin{vmatrix} a-3b & b & x+a \\ c-3d & d & y+c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} a-3b & b \\ c-3d & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a-3b & b \\ c-3d & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} (a-3b)+3b & b \\ (c-3d)+3d & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

故選(C)(D)(E)

17.(A;B;E)

如右圖，正四面體$ABCD$邊長為 2，K、M、N 各為$\overline{BD}$、$\overline{CD}$、$\overline{AB}$之中點，下列敘述何者正確？



(A) $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{AB}$ (B) $\overline{MN}=\sqrt{2}$ (C) $\angle NKM=120°$

(D) 平面ABC與平面ACD之兩面角為φ，則$\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(E) 承(D)，$\angle AMB=\varphi$

解析

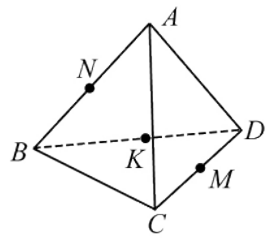
$\overline{AM}=\overline{AD}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}=\overline{BM},\ \overline{AN}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\times 2=1$

(A) $\cos\angle MAB=\dfrac{\overline{AM}^2+\overline{AB}^2-\overline{BM}^2}{2\overline{AM}\cdot\overline{AB}}=\dfrac{4}{2\cdot\sqrt{3}\cdot 2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}&=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AB}\\&=-\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AB}=-|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{AB}|\cos\angle MAB+|\overrightarrow{AN}||\overrightarrow{AB}|\\&=-\sqrt{3}\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+1\cdot 2=0\end{aligned}$$

$\therefore \overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{AB}$

(B) $\cos\angle MAB=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\overline{AN}^2+\overline{AM}^2-\overline{MN}^2}{2\overline{AN}\cdot\overline{AM}}$



$$\begin{aligned}\Rightarrow\overline{MN}^2&=\overline{AN}^2+\overline{AM}^2-2\overline{AN}\cdot\overline{AM}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\\&=1+3-2\cdot 1\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=2\end{aligned}$$

$\therefore \overline{MN}=\sqrt{2}$

(C) $\because \overline{DK}=\overline{DM},\ \angle MDK=60°\Rightarrow\Delta KDM$ 為正三角形，同理 ΔBNK 也是正三角形

$\therefore \overline{NK}=\overline{KM}=1$

因此$\cos\angle NKM=\dfrac{1+1-2}{2\cdot 1\cdot 1}=0\Rightarrow\angle NKM=90°$

(D) $\because \Delta ABC$ 和 ΔACD 皆為邊長 2 的正三角形，分別對 B、D 做垂線會交於同一點，記為P

$\therefore \cos\varphi=\dfrac{3+3-4}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$

(E) $\cos\angle AMB=\dfrac{\overline{AM}^2+\overline{BM}^2-\overline{AB}^2}{2\cdot\overline{AM}\cdot\overline{BM}}=\dfrac{3+3-4}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}=\cos\varphi$

$\therefore \angle AMB=\varphi$

故選(A)(B)(E)

18.(A;B;C;D)

下列哪些向量與$\vec{a}\times\vec{b}$垂直？

(A) $\vec{a}$ (B) $3\vec{a}$ (C) $\vec{a}-\vec{b}$ (D) $5\vec{b}-4\vec{a}$ (E) $\vec{b}\times\vec{a}$

解析

$\because \vec{a}\times\vec{b}$ 和 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 垂直
$\therefore \vec{a}\times\vec{b}$ 和所有 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 構成的線性組合都垂直
故選(A)(B)(C)(D)

19.(D;E)

已知 $\vec{n}$ 與兩向量 $\vec{a}=(1,-1,0)$ 、 $\vec{b}=(3,3,-4)$ 均垂直，且 $|\vec{n}|=\sqrt{34}$，試回答下列問題：

$\vec{n}$ 值可能爲何？

(A) $\vec{n}=(-1,-1,2)$　(B) $\vec{n}=(3,4,-5)$　(C) $\vec{n}=(-3,-4,5)$
(D) $\vec{n}=(-\frac{4}{\sqrt{2}},-\frac{4}{\sqrt{2}},-\frac{6}{\sqrt{2}})$　(E) $\vec{n}=(\frac{4}{\sqrt{2}},\frac{4}{\sqrt{2}},\frac{6}{\sqrt{2}})$

解析

$$\begin{cases}\vec{a}=(1,-1,0)\\ \vec{b}=(3,3,-4)\end{cases}$$

$\vec{t}=\left(\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 3 & -4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & 1\\ -4 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 3\end{vmatrix}\right)=(4,4,6)$ 爲一公垂向量

令 $\vec{n}=a\cdot\vec{t}=(4a,4a,6a)$，根據題意可得

$\sqrt{16a^2+16a^2+36a^2}=\sqrt{34}\Rightarrow a^2=\frac{34}{68}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \vec{n}=(\frac{4}{\sqrt{2}},\frac{4}{\sqrt{2}},\frac{6}{\sqrt{2}})$ 或 $(-\frac{4}{\sqrt{2}},-\frac{4}{\sqrt{2}},-\frac{6}{\sqrt{2}})$

故選(D)(E)

20.(E)

承上題

由 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所張出之平行四邊形的面積爲何？

(A) 9　(B) $8\sqrt{2}$　(C) $8\sqrt{2}$　(D) $\sqrt{34}$　(E) $\sqrt{68}$

解析

令 $S=$ 由 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所張出之平行四邊形的面積，則 $S=|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{4^2+4^2+6^2}=\sqrt{68}$
故選(E)