段考錦囊

年級：高中二年級

範圍：上學期第一次段考

科目：數學

重點整理

寰宇知識科技股份有限公司．有著作權．請勿侵害

一、一分鐘準備段考

- 基本定義和題型要「熟」，不是只要「會」
- 解出一題難題，勝過解十題簡單的題目，不要逃避不會的題目
- 多做題目，培養對題型的解題感覺
- 利用名師學院系列產品，反覆觀看、補強弱點

二、重點回顧

三角函數基本公式

(1) 倒數關係

$$\sin\theta=\frac{1}{\csc\theta},\quad \cos\theta=\frac{1}{\sec\theta},\quad \tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}$$

(2) 互餘關係

$$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta,\quad \cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta,\quad \tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta$$

$$\cot(90^\circ-\theta)=\tan\theta,\quad \sec(90^\circ-\theta)=\csc\theta,\quad \csc(90^\circ-\theta)=\sec\theta$$

(3) 商數關係

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta,\quad \frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta$$

(4) 平方關係

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\quad 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta,\quad 1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$$

三角形面積公式

(1) ΔABC面積$=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$

(2) ΔABC面積$=\frac{abc}{4R}$　（R 爲三角形外接圓半徑）

(3) ΔABC面積$=r\cdot s$　（r 爲三角形內切圓半徑）

(4) ΔABC面積$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　（即海龍公式，其中 $s=\frac{a+b+c}{2}$）

名師學院™ LEARNING www.kut.com.tw

➢ 正弦、投影及餘弦定理

正弦定理：

ΔABC中，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ （R為三角形外接圓半徑）

投影定理：

ΔABC中，$a=b\cos C+c\cos B$，$b=a\cos C+c\cos A$，$c=a\cos B+b\cos A$

餘弦定理：

ΔABC中，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

名師學院™ LEARNING SMART www.kut.com.tw

寰宇知識科技股份有限公司 · 有著作權 · 請勿侵害

精選試卷及詳解

考試日期僅供參考

寰宇知識科技股份有限公司．有著作權．請勿侵害

高二數學三角正餘弦的相關定理

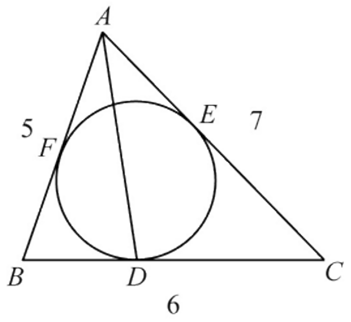
範圍：	三角　正餘弦的相關定理	考試日期：	2014/09/04
適用年級：	高中二年級	適用科目：	數學
題型：	單選題：9題　多選題：1題		

一、單選題

1.(　)

已知ΔABC中，$\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=6$、$\overline{AC}=7$，D、E、F為內切圓在ΔABC上的切點（如右圖），求$\overline{AD}=$？

(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7　(E) 8



2.(　)

已知三角形三中線長為$\frac{1}{2}\sqrt{106}$，$\frac{1}{2}\sqrt{79}$，$\frac{1}{2}\sqrt{46}$，求三邊長為何？

(A) $1，1，\sqrt{2}$　(B) $2，2，2$　(C) $4，5，6$　(D) $5，12，13$　(E) $\sqrt{106}，\sqrt{79}，\sqrt{46}$

3.(　)

ΔABC三邊長a、b、c對應角為A、B、C，已知$a-2b+c=0$，$3a+b-2c=0$，試求$\cos A$ ： $\cos B$ ： $\cos C=$？

(A) $3:5:7$　(B) $(-3):5:7$　(C) $11:13:15$　(D) $13:11:(-7)$　(E) $15:(-13):11$

4.(　)

坐標平面上A、B兩點的極坐標分別為$A(\sqrt{3},190°)$，$B(2,70°)$，求A、B兩點之距離為何？

(A) $\sqrt{5+\sqrt{2}}$　(B) $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$　(C) $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$　(D) $\sqrt{7+2\sqrt{2}}$　(E) $\sqrt{7+2\sqrt{3}}$

5.(　)

已知ΔABC三邊長為a、b、c，若$c^4-2(a^2+b^2)c^2+a^4+a^2b^2+b^4=0$，求$\angle C=$？

(A) $30°$或$150°$　(B) $45°$或$135°$　(C) $55°$或$125°$　(D) $60°$或$120°$　(E) $80°$或$100°$

6.(　)

已知一三角形三邊長為t^2+3、$-t^2-2t+3$、$4t$，求最大角為何？

(A) $60°$　(B) $90°$　(C) $100°$　(D) $120°$　(E) $150°$

7.(　)

ΔABC 中，$\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C=3\sin A\sin B\sin C$，則 ΔABC 為何種三角形？

(A) 正三角形　(B) 等腰三角形　(C) 等腰直角三角形　(D) 銳角三角形　(E) 鈍角三角形

8.(　)

梯形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$ 且 $\overline{AB}=13$，$\overline{BC}=25$，$\overline{CD}=15$，$\overline{DA}=11$，求梯形面積為何？

(A) 198　(B) 216　(C) 234　(D) 250　(E) 278

9.(　)

$ABCD$ 為圓內接四邊形，$\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CD}=4$，$\overline{AD}=3$，求 $\overline{BD}=$ ？

(A) $\sqrt{\frac{112}{5}}$　(B) $\sqrt{\frac{112}{7}}$　(C) $\sqrt{\frac{112}{13}}$　(D) $\sqrt{\frac{253}{7}}$　(E) $\sqrt{\frac{253}{13}}$

二、多選題

10.(　)

ΔABC 中，已知 $\overline{AB}=10$、$\overline{AC}=4$、$\overline{BC}=12$，則下列何者正確？

(A) ΔABC 面積 $=3\sqrt{39}$　(B) $h_a : h_b : h_c = 5:2:6$　(C) $h_a=\frac{\sqrt{39}}{2}$

(D) $h_b=\frac{3\sqrt{39}}{2}$　(E) $h_c=\frac{3\sqrt{39}}{5}$

高二數學三角正餘弦的相關定理

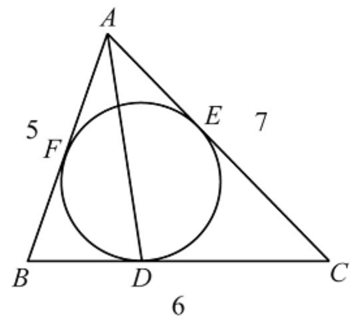
範圍：　　三角　正餘弦的相關定理　　考試日期：　2019/09/05
適用年級：　高中二年級　　適用科目：　數學
題型：　　單選題：9題　多選題：1題

一、單選題

1.(B)

已知ΔABC中，$\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=6$、$\overline{AC}=7$，D、E、F 為內切圓在ΔABC上的切點（如右圖），求$\overline{AD}=$？

(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7　(E) 8



解析

1° 設$\overline{AE}=\overline{AF}=x$，$\overline{BD}=\overline{BF}=y$，$\overline{CD}=\overline{CE}=z$,,則

$$\begin{cases} x+y=5\cdots\cdots① \\ y+z=6\cdots\cdots② \\ x+z=7\cdots\cdots③ \end{cases}$$

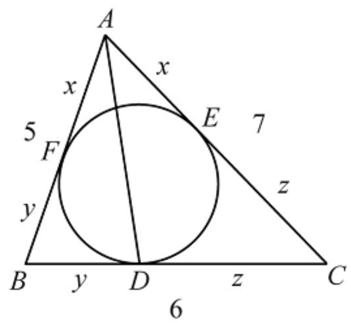
由①+②+③可得$2(x+y+z)=18$

$\Rightarrow x+y+z=9\cdots\cdots④$

由④－②得$x=3$

④－③得$y=2$

④－①得$z=4$



2° 在ΔABD中

$$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{BD}\cdot\cos B=5^2+2^2-2\cdot5\cdot2\cdot\frac{5^2+6^2-7^2}{2\cdot5\cdot6}=29-\frac{12}{3}=25$$

$\Rightarrow \overline{AD}=5$

2.(C)

已知三角形三中線長為$\frac{1}{2}\sqrt{106}$，$\frac{1}{2}\sqrt{79}$，$\frac{1}{2}\sqrt{46}$，求三邊長為何？

(A) 1，1，$\sqrt{2}$　(B) 2，2，2　(C) 4，5，6　(D) 5，12，13　(E) $\sqrt{106}$，$\sqrt{79}$，$\sqrt{46}$

解析

設a，b，c三邊上的中線長分別為m_a，m_b，m_c，根據三角形之中線長公式：

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}\Rightarrow(2m_a)^2=2(b^2+c^2)-a^2$$

同理，$(2m_b)^2=2(a^2+c^2)-b^2$，$(2m_c)^2=2(a^2+b^2)-c^2$

$$\Rightarrow\begin{cases}2(b^2+c^2)-a^2=4{m_a}^2=106\cdots\cdots①\\2(a^2+c^2)-b^2=4{m_b}^2=79\ \cdots\cdots②\\2(a^2+b^2)-c^2=4{m_c}^2=46\ \cdots\cdots③\end{cases}$$

$$\frac{①+②+③}{3}\Rightarrow a^2+b^2+c^2=77\cdots\cdots④$$

$\dfrac{④\times2-①}{3}\Rightarrow a^2=16$，得$a=4$（負不合）

$\dfrac{④\times2-②}{3}\Rightarrow b^2=25$，得$b=5$（負不合）

$\dfrac{④\times2-③}{3}\Rightarrow c^2=36$，得$c=6$（負不合）

故三邊長為4，5，6

3.（D）

ΔABC三邊長a、b、c對應角為A、B、C，已知$a-2b+c=0$，$3a+b-2c=0$，試求$\cos A$ ：$\cos B$ ：$\cos C=$？

(A) $3:5:7$ (B) $(-3):5:7$ (C) $11:13:15$ (D) $13:11:(-7)$ (E) $15:(-13):11$

解析

$$\begin{cases}a-2b+c=0\ \cdots\cdots\ ①\\3a+b-2c=0\cdots\cdots\ ②\end{cases}$$

$$2\times①+②\Rightarrow5a-3b=0\Rightarrow b=\frac{5}{3}a$$

$$2\times②+①\Rightarrow7a-3c=0\Rightarrow c=\frac{7}{3}a$$

$$\therefore\sin A ：\sin B ：\sin C=a ：b ：c=a ：\frac{5}{3}a ：\frac{7}{3}a=3 ：5 ：7$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5^2+7^2-3^2}{2\cdot5\cdot7}=\frac{13}{14}$$

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{3^2+7^2-5^2}{2\cdot3\cdot7}=\frac{11}{14}$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot3\cdot5}=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\cos A ：\cos B ：\cos C=\frac{13}{14} ：\frac{11}{14} ：(-\frac{1}{2})=13 ：11 ：(-7)$$

4.（E）

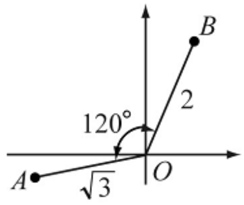
坐標平面上 A、B 兩點的極坐標分別為 $A(\sqrt{3},190°)$，$B(2,70°)$，求 A、B 兩點之距離為何？

(A) $\sqrt{5+\sqrt{2}}$　(B) $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$　(C) $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$　(D) $\sqrt{7+2\sqrt{2}}$　(E) $\sqrt{7+2\sqrt{3}}$

解析

$\angle AOB=190°-70°=120°$

依據餘弦定理



$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos 120°$

$=3+4-2\cdot\sqrt{3}\cdot 2\cdot(-\dfrac{1}{2})$

$=7+2\sqrt{3}$

$\Rightarrow \overline{AB}=\sqrt{7+2\sqrt{3}}$

5.(D)

已知 ΔABC 三邊長為 a、b、c，若 $c^4-2(a^2+b^2)c^2+a^4+a^2b^2+b^4=0$，求 $\angle C=$？

(A) $30°$或$150°$　(B) $45°$或$135°$　(C) $55°$或$125°$　(D) $60°$或$120°$　(E) $80°$或$100°$

解析

原式 $\Rightarrow c^4-2(a^2+b^2)c^2+(a^2+b^2)^2-a^2b^2=0$

$\Rightarrow [c^2-(a^2+b^2)]^2-(ab)^2=0$

$\Rightarrow (c^2-a^2-b^2+ab)(c^2-a^2-b^2-ab)=0$

$\therefore a^2+b^2-c^2=ab$ 或 $-ab$

故 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{ab}{2ab}$ 或 $-\dfrac{ab}{2ab}=\dfrac{1}{2}$ 或 $-\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \angle C=60°$或$120°$

6.(D)

已知一三角形三邊長為 t^2+3、$-t^2-2t+3$、$4t$，求最大角為何？

(A) $60°$　(B) $90°$　(C) $100°$　(D) $120°$　(E) $150°$

解析

1° 邊長 $>0 \Rightarrow \begin{cases} t^2+3>0 \\ -t^2-2t+3>0 \\ 4t>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t\in R \\ -3<t<1 \\ t>0 \end{cases} \Rightarrow 0<t<1$

兩邊和 $>$ 第三邊 $\Rightarrow \begin{cases} (t^2+3)+(-t^2-2t+3)>4t \\ (t^2+3)+4t>-t^2-2t+3 \\ (-t^2-2t+3)+4t>t^2+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1>t \\ t<-2 \text{ 或 } t>0 \\ 0<t<1 \end{cases} \Rightarrow 0<t<1$

綜合以上 $\Rightarrow 0<t<1$

2° $(t^2+3)-(-t^2-2t+3)=2t^2+2t>0$

$(t^2+3)-(4t)=(t-1)(t-3)>0 \quad (\because t-1<0,\ t-3<0)$

$\Rightarrow$ 最大邊為 t^2+3，則其對角為最大角，設為 θ

$$\cos\theta=\frac{(-t^2-2t+3)^2+\overbrace{(4t)^2-(t^2+3)^2}^{\text{平方差}}}{2\cdot(-t^2-2t+3)\cdot 4t}$$

$$=\frac{(-2t+6)(-2t^2-2t)+16t^2}{8t(-t^2-2t+3)}$$

$$\overset{\text{分子分母}}{\underset{\text{約去}4t}{=}}\frac{(t-3)(t+1)+4t}{2(-t^2-2t+3)}=\frac{t^2+2t-3}{2(-t^2-2t+3)}=-\frac{1}{2}$$

$\therefore \theta=120°$

7.(A)

ΔABC 中，$\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C=3\sin A\sin B\sin C$，則 ΔABC 為何種三角形？

(A) 正三角形 (B) 等腰三角形 (C) 等腰直角三角形 (D) 銳角三角形 (E) 鈍角三角形

解析

1° 將 $\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$ 代入原式

$\Rightarrow (\dfrac{a}{2R})^3+(\dfrac{b}{2R})^3+(\dfrac{c}{2R})^3=3(\dfrac{a}{2R})(\dfrac{b}{2R})(\dfrac{c}{2R})$

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$\Rightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

$\because a+b+c\neq 0 \quad \therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

2° $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0$

$\Rightarrow a=b=c$

故 ΔABC 為正三角形

8.(B)

梯形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$ 且 $\overline{AB}=13$，$\overline{BC}=25$，$\overline{CD}=15$，$\overline{DA}=11$，求梯形面積為何？

(A) 198 (B) 216 (C) 234 (D) 250 (E) 278

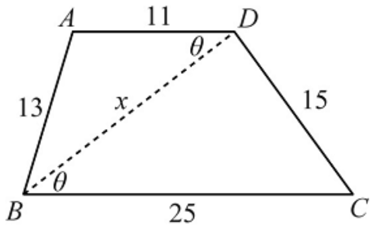
解析

1° 設 $\angle ADB=\theta=\angle CBD$，$\overline{BD}=x$，則

$\cos\theta=\dfrac{11^2+x^2-13^2}{2\cdot 11\cdot x}=\dfrac{25^2+x^2-15^2}{2\cdot 25\cdot x}$

$\overset{\text{化簡}}{\Rightarrow} 25x^2-1200=11x^2+4400 \Rightarrow x^2=400$

$\therefore x=20$（負不合）



2° $\cos\theta=\dfrac{25^2+20^2-15^2}{2\cdot 25\cdot 20}=\dfrac{4}{5}$

$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{3}{5}$

故梯形面積 $=\Delta ABD$ 面積 $+\Delta BCD$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\cdot 11\cdot 20\cdot\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{2}\cdot 25\cdot 20\cdot\dfrac{3}{5}=216$

9.（E）

$ABCD$ 為圓內接四邊形，$\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CD}=4$，$\overline{AD}=3$，求 $\overline{BD}=$？

(A) $\sqrt{\dfrac{112}{5}}$ (B) $\sqrt{\dfrac{112}{7}}$ (C) $\sqrt{\dfrac{112}{13}}$ (D) $\sqrt{\dfrac{253}{7}}$ (E) $\sqrt{\dfrac{253}{13}}$

解析

令 $\angle BAD=\theta \Rightarrow \angle BCD=180°-\theta$，設 $\overline{BD}=x$

則 $\cos\theta=\dfrac{2^2+3^2-x^2}{2\cdot 2\cdot 3}$，$\cos(180°-\theta)=\dfrac{4^2+5^2-x^2}{2\cdot 4\cdot 5}$

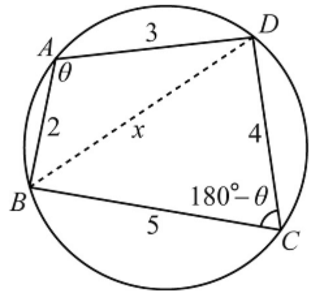
$\because \cos\theta=-\cos(180°-\theta)$

$\therefore \dfrac{2^2+3^2-x^2}{2\cdot 2\cdot 3}=-\dfrac{4^2+5^2-x^2}{2\cdot 4\cdot 5}$

$\Rightarrow \dfrac{13-x^2}{3}=\dfrac{41-x^2}{-10}$

$\Rightarrow -130+10x^2=123-3x^2 \Rightarrow 13x^2=253$

$\therefore \overline{BD}=x=\sqrt{\dfrac{253}{13}}$



二、多選題

10.（A;C;D;E）

ΔABC 中，已知 $\overline{AB}=10$、$\overline{AC}=4$、$\overline{BC}=12$，則下列何者正確？

(A) ΔABC 面積 $=3\sqrt{39}$ (B) $h_a:h_b:h_c=5:2:6$ (C) $h_a=\dfrac{\sqrt{39}}{2}$

(D) $h_b=\dfrac{3\sqrt{39}}{2}$ (E) $h_c=\dfrac{3\sqrt{39}}{5}$

解析

$s=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{12+4+10}{2}=13$

ΔABC 面積 $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{13\times1\times9\times3}=3\sqrt{39}$

$h_a:h_b:h_c=\dfrac{1}{a}:\dfrac{1}{b}:\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{12}:\dfrac{1}{4}:\dfrac{1}{10}=5:15:6$

$3\sqrt{39}=\dfrac{1}{2}\times12\times h_a=\dfrac{1}{2}\times4\times h_b=\dfrac{1}{2}\times10\times h_c$

$\Rightarrow h_a=\dfrac{\sqrt{39}}{2}$， $h_b=\dfrac{3\sqrt{39}}{2}$， $h_c=\dfrac{3\sqrt{39}}{5}$