段考錦囊

年級：高中一年級

範圍：下學期第三次段考

科目：數學

重點整理

一、一分鐘準備段考

- 基本定義和題型要「熟」，不是只要「會」
- 解出一題難題勝過解十題簡單的題目，不要逃避不會的題目
- 多做題目，培養對題型的解題感覺
- 利用名師學院系列產品，反覆觀看、補強弱點

二、重點回顧

機率

一、機率的基本概念

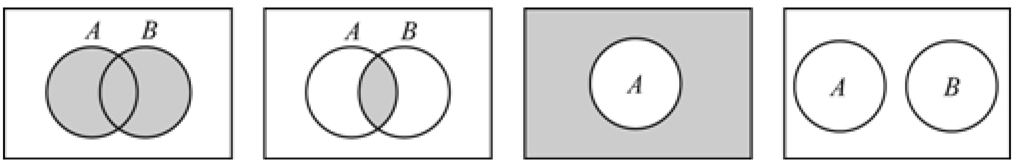
1. 樣本空間：一項試驗中所有可能發生的結果所成的集合，常以代號 S 表示。
2. 樣本點：樣本空間的每一元素皆稱為樣本點。
3. 事件：樣本空間的每一個子集皆稱為一個事件，而只含一個樣本點的事件稱為基本事件。

二、拉普拉斯之古典機率定義

S 為某試驗的樣本空間，假設其中各基本事件發生的機會均等，則對任一事件 A，其發生機率為 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$。

三、事件之間的關係

1. 和事件：$A\cup B$ 表示由事件 A 和事件 B 的所有樣本所構成的事件。
2. 積事件：$A\cap B$ 表示由事件 A 和事件 B 共有的樣本所構成的事件。
3. 餘事件：A' 表示不在 A 中的樣本所構成的事件。
4. 互斥事件：$A\cap B=\phi$ 表示事件 A 和事件 B 不可能同時發生。



四、集合的運算公式

1. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

2. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

3. $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

4. $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

5. $(B\cup C)'=B'\cap C'$

6. $(B\cap C)'=B'\cup C'$

五、機率的性質與運算法則

1. $P(\phi)=0$, $P(S)=1$。

2. 若 A 和 B 為 S 中的二事件, 且 A $\subset$ B，則 $P(A)\le P(B)$。

3. 若 A $\subset$ S 為一事件, 則 $0\le P(A)\le 1$。

4. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

5. $P(A')=1-P(A)$

6. $P(A'\cap B')=1-P(A\cup B)$

7. $P(A'\cup B')=1-P(A\cap B)$

六、條件機率

在事件 B 發生的條件下，事件 A 發生的機率，稱為條件機率，以 $P(A\mid B)$ 來表示，$P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$。

七、貝氏定理

設A_1、A_2、A_3、⋯、A_n為樣本空間S的一個分割，其中$P(A_i)>0$，$i=1$、2、...、n，

若$\underbrace{B\text{ 為 }S\text{ 中的任意事件}}_{\text{表某種試驗的一項結果}}$且$P(B)>0$，則：

$$P(A_k \mid B)=\frac{P(A_k)\times P(B\mid A_k)}{P(A_1)\times P(B\mid A_1)+P(A_2)\times P(B\mid A_2)+\cdots+P(A_n)\times P(B\mid A_n)}$$

八、獨立事件的性質

若 $P(A)>0$、$P(B)>0$，則下列三個式子必同時發生（一者成立，另二者必成立）。

1. $P(A\mid B)=P(A)$
2. $P(B\mid A)=P(B)$
3. $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

➢ 數據分析

一、平均數

1. 算術平均數：若有 n 個資料, 其值分別為 x_1、x_2、...、x_n，則此 n 個資料的算術平均數定義為 $\overline{X}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$。

2. 加權平均數：一組資料 x_1、x_2、...、x_n 中, 若所占的權數分別為 w_1、w_2、...、w_n，則此組資料的加權平均數為 $W=\dfrac{x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$。

3. 幾何平均數：x_1、x_2、...、$x_n\in R^+$，則此 n 個資料的幾何平均數 $G=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$。

4. $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$（算術平均數 ≥ 幾何平均數）

二、中位數(Me)

1. 將 n 個未分組資料，依其大小順序由小而大排成一列。
   - 若 n 為奇數，則 Me 即為最中間項。
   - 若 n 為偶數，則 Me 為最中間二項的算術平均數。
2. n 個資料若已分組，則中位數即第 $\frac{n}{2}$ 個。

三、全距(R)

1. 未分組資料：全距=最大數-最小數
2. 已分組資料：全距=最大上限-最小上限

四、四分位差

將一群統計資料由小而大排成一列，則中位數(*Me*)前段數值之中位數稱為第一四分位數(*Q1*)，中位數(*Me*)後段數值之中位數稱為第三四分位數(*Q3*)，而中位數 *Me* 可視為 *Q2(Me=Q2)*，則規定四分位差=*Q3-Q1*

五、母體標準差

1. $$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\overline{X}^2}$$
2. $$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\overline{X}^2}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}x_i^2=n(S^2+\overline{X}^2)$$

六、變異係數

在一般的情形下，要比較兩組或兩組以上的資料的差異，不能只比較標準差的大小，需要一種相對的測度值作為比較的標準。

變異係數 $CV=\frac{S}{\overline{X}}\times 100\%$，就是一種相對測度值，其中 $\overline{X}$ 為算術平均數，S 為標準差。變異係數較大，表示這組資料的差異較大，則這組資料的平均數 $\overline{X}$ 較不能反映集中趨勢。

七、相關係數

1. 各種變數（可量化的現象）之間的相互關係，統計學上稱為相關性。
2. 兩種變量間的關係可用直線圖形適當表示者，稱為直線相關。
3. 兩種變量間的關係可作曲線圖形適當表示者，稱為曲線相關或非直線相關。
4. $$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)]}{n\sigma_x\sigma_y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)]}{n\cdot\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2}{n}}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_y)^2}{n}}}$$
$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_y)^2}}$$

精選試卷及詳解

考試日期僅供參考

高一數學下機率段考

範圍：　機率　　考試日期：　2014/04/22
適用年級：　高中一年級　　適用科目：　數學
題型：　單選題：1題　多選題：3題　選填題：16題

一、單選題

1.(　)
擲一公正的骰子，若連續三次出現同點數就停止。設α為在第一、二次都是1點的情況下，恰好在第五次停止的條件機率；β為在第一次是1點的情況下，恰好在第四次停止的條件機率；γ為恰好投擲第三次停止的機率，則下列敘述何者正確？
(A) $\alpha>\beta>\gamma$　(B) $\alpha=\beta=\gamma$　(C) $\alpha<\beta=\gamma$　(D) $\alpha=\beta<\gamma$

二、多選題

2.(　)
設投擲一公正骰子一次的樣本空間為S，點數為奇數的事件為A，點數為偶數的事件為B，則下列何者正確？
(A) S共有6個樣本點
(B) 本試驗共有64個事件
(C) S不是一個事件
(D) 事件A與B互斥
(E) 此試驗中與事件A互斥的事件有7個

3.(　)
某飲料工廠生產一款“小太陽果汁”，被檢舉含有塑化劑$DEHP$。含$DEHP$的果汁有90%的機率經儀器檢驗後會呈現陽性反應；沒含$DEHP$的果汁也有5%的機率會被誤檢而呈現陽性反應，假設該工廠有1%的“小太陽果汁”含有$DEHP$，今從該工廠任意拿一瓶“小太陽果汁”做檢驗，則下列哪些是正確的？
(A) 檢驗結果呈陽性反應的機率為$\dfrac{585}{10000}$
(B) 若檢驗結果呈陽性反應，則該果汁含$DEHP$的機率超過50%
(C) 若檢驗結果呈陽性反應，則該果汁含$DEHP$的機率小於20%
(D) 若檢驗結果呈陰性反應，則該果汁不含$DEHP$的機率超過98%

4.(　)

一副撲克牌有 52 張，分成四種花色，即黑桃、梅花、紅心、磚塊，每種花色又有 13 個點數，即 $2, 3, 4, \cdots, 10, J, Q, K, A$，每種花色都有數字牌(2～10)，英文牌四張，若其中甲為紅心 3，乙為黑桃 J，則下列選項何者正確？
(A) 今從 52 張撲克牌中任意取一張，則甲被抽中的機會大於乙被抽中的機會
(B) 今從 52 張撲克牌中任意取兩張，則甲被抽中的機會大於乙被抽中的機會
(C) 今從 52 張撲克牌中任意取兩張，則甲與乙至少被抽中一張的機率為 $\frac{101}{1326}$
(D) 今從 52 張撲克牌中任意取兩張，則兩張均為數字牌的機率大於兩張均為英文牌的機率
(E) 今從 52 張撲克牌中任意取兩張，則兩張是同花色的機率是 $\frac{1}{17}$

三、選填題

5.(　)
黃再鴻申辦提款卡時，依銀行規定須自訂 4 個阿拉伯數字排成一組密碼，某天提款時發現他忘了正確密碼，只記得是由 2, 4, 6, 8 四個數字排成的，提款機設定當輸入的密碼錯誤達三次時，會沒收該提款卡，黃再鴻嘗試輸入不同密碼，則他的提款卡會被沒收的機率是 $\frac{①}{②}$。

6.(　)
一年 12 個月分中，有 7 個月分為大月、5 個月分為小月，今從 12 個月分中分次抽出相異的 3 個月，依序為大月、小月、大月的機率為 $\frac{①}{②③}$。

7.(　)
某社團有高一、高二、高三學生，依序占了 50%、40%、10%，且此社團的高一、高二、高三學生中各有 30%、60%、10%參加其他副社，今任抽一位學生擔任社長，在已知此人沒有參加其他副社的條件下，求此人是高二學生的機率為 $\frac{①}{②③}$。

8.(　)
交通規則測驗時，答對有兩種可能，一種是會做而答對，一種是不會做但猜對。已知黃再鴻練習交通規則筆試測驗，會做的機率是 0.8。現有一題 5 選 1 的交通規則選擇題，設黃再鴻會做就答對，不會做就亂猜。已知此題黃再鴻答對，試問在此條件之下，此題黃再鴻是因會做而答對（不是亂猜）的機率是 $\frac{①②}{③④}$。

9.(　)

盒中裝有 10 個外形及大小都相同的物品，其中 4 個爲劣級品。現從中隨機抽取一個測試，測試後不放回，直到找出這 4 個次級品爲止，那麼第 5 次測試時發現第 4 個次級品的機率爲 $\dfrac{\text{①}}{\text{②③④}}$。

10.(　)

喜德在學校考試的時候看到下面的題目時，發現自己都不會，只好隨意猜，請問喜德恰好猜對 2 題的機率爲 $\dfrac{\text{①}}{\text{②③}}$。

連連看：

今有 5 個球, 3 個箱子，請將題目的正確答案連起來：

(1) 球相同，箱子相同，球全部放入箱子。	●	●5
(2) 球相同，箱子不同，球全部放入箱子。	●	●41
(3) 球不同，箱子相同，球全部放入箱子。	●	●21
(4) 球不同，箱子不同，球全部放入箱子。	●	●243
(5) 球相同，箱子不同，球全部放入箱子，每一箱至少一球。	●	●6
(6) 球不同，箱子不同，球全部放入箱子，每一箱至少一球。	●	●150

11.(　)

現今社會有毒添加劑盛行，常讓人在不知情的情況下受到傷害。現有 A、B 兩家飲料店皆只進貨甲、乙、丙三種原料，卻不知甲原料已遭受到有毒添加劑的汙染。已知 A、B 兩店在製作飲料時，每種飲料皆只使用甲、乙、丙三種原料中的一種。而在 A 店，選到甲原料的機率爲選到乙原料的兩倍，選到丙原料的機率亦爲選到乙原料的兩倍。在 B 店，選到甲原料的機率爲選到乙原料的一半，選到丙原料的機率亦爲選到乙原料的一半。現有一人欲買一杯飲料，選擇到 A 或 B 飲料店購買的機會相同，試回答下列問題：

其購買的飲料遭受有毒添加劑汙染的機率爲 $\dfrac{\text{①②}}{\text{③④}}$。

12.(　)

承上題

此受有毒添加劑汙染的飲料來自 A 店之機率爲 $\dfrac{\text{①}}{\text{②③}}$。

13.(　)
狡兔有三窟 A 窟、B 窟、C 窟，其習性為：每日夜晚，此兔會決定隔天要繼續留在原窟，或移動至另兩窟之一，而隔日留在原窟的機率為 $\frac{1}{2}$，移動至另兩窟之機率分別為 $\frac{1}{4}$、$\frac{1}{4}$。

例如若當日在 A 窟，則隔日在 A 窟之機率為 $\frac{1}{2}$，移動至 B 窟、C 窟之機率分別為 $\frac{1}{4}$、$\frac{1}{4}$。

已知第一日此狡兔在 A 窟，試回答下列問題：

第三日仍在 A 窟之機率 $=\dfrac{①}{②}$。

14.(　)

承上題

第六日仍在 A 窟之機率 $=\dfrac{①②③}{④⑤⑥}$。

15.(　)
某電碼是由「·」或「-」組成，例如「··-」、「-·-」、「--·」，且此三個均代表不同的電碼。一個電碼的長度定義為：$2\times$(「·」的個數)$+1\times$(「-」的個數)。例如電碼「···-」的長度為 $2\times3+1=7$。今有一長度為 5 的電碼，試問此電碼是由 2 個「·」與 1 個「-」組成的機率為 $\dfrac{①}{②}$。

16.(　)
跆拳道擂台賽，比賽過程是甲、乙二校各派 7 名選手，按甲、乙二校事先安排好之順序出場比賽，雙方先由 1 號隊員出賽，敗者遭淘汰，敗方再派 2 號出場迎戰勝方之 1 號，以此類推，直到一方 7 名選手全部淘汰為止，則另一方獲勝。

問甲校由第 5 號選手取得勝利之機率為 $\dfrac{①②③}{④⑤⑥⑦}$。（假設甲、乙兩校選手獲勝機率皆為 $\frac{1}{2}$）

17.(　)
投擲一個公正骰子三次，設其出現的點數依次為 x, y, z，試回答下列問題：

$(x-y)(y-z)=0$ 的機率為 $\dfrac{①②}{③④}$。

18.(　)

承上題

x, y, z 中最大者為 5 的機率為 $\dfrac{①②}{③④⑤}$。

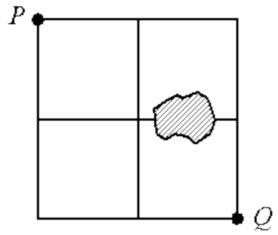
19.(　)

承上題

將 x, y, z 作成一三位數 xyz，則在 x, y, z 均相異的條件下，此三位數 xyz 為 9 的倍數的機率為 $\dfrac{①}{②③}$。

20.(　)

有街道如圖（每一小方格皆為正方形），甲自 P 往 Q，乙自 Q 往 P，兩人同時出發以相同速度，沿最短距離前進，且不經過斜線區域。假設在每一分叉路口時，選擇前進方向的機率都相等，問甲、乙二人在路上相遇的機率為 $\dfrac{①}{②③}$。



高一數學下機率段考

範圍：　機率　　考試日期：　2014/04/22
適用年級：　高中一年級　　適用科目：　數學
題型：　單選題：1題　多選題：3題　選填題：16題

一、單選題

1.(D)

擲一公正的骰子，若連續三次出現同點數就停止。設 α 為在第一、二次都是 1 點的情況下，恰好在第五次停止的條件機率；β 為在第一次是 1 點的情況下，恰好在第四次停止的條件機率；γ 為恰好投擲第三次停止的機率，則下列敘述何者正確？

(A) $\alpha>\beta>\gamma$　(B) $\alpha=\beta=\gamma$　(C) $\alpha<\beta=\gamma$　(D) $\alpha=\beta<\gamma$

解析

$$\alpha=\frac{\frac{1}{36}\times C_1^5\times\frac{1}{216}}{\frac{1}{36}}=\frac{5}{216},\quad \beta=\frac{\frac{1}{6}\times C_1^5\times\frac{1}{216}}{\frac{1}{6}}=\frac{5}{216},\quad \gamma=C_1^6\times\frac{1}{216}=\frac{6}{216}$$

二、多選題

2.(A;B;D)

設投擲一公正骰子一次的樣本空間為 S，點數為奇數的事件為 A，點數為偶數的事件為 B，則下列何者正確？

(A) S 共有 6 個樣本點

(B) 本試驗共有 64 個事件

(C) S 不是一個事件

(D) 事件 A 與 B 互斥

(E) 此試驗中與事件 A 互斥的事件有 7 個

解析

(A) 骰子可能出現的點數為 1, 2, 3, 4, 5, 6

(B) 每個樣本點發生與不發生皆產生一事件，故總共有 $2^6=64$ 個事件

(C) S 是 S 的一子集合，故 S 為一事件

(D) 骰子每次投擲僅會有一個點數，且該點數不是奇數就是偶數，因此兩事件互斥

(E) 點數為偶數的集合為 $\{2, 4, 6\}$，故與事件 A 互斥的事件個數為 $2^3=8$ 個

3.(A;C;D)

某飲料工廠生產一款“小太陽果汁”，被檢舉含有塑化劑 $DEHP$。含 $DEHP$ 的果汁有 90%的機率經儀器檢驗後會呈現陽性反應；沒含 $DEHP$ 的果汁也有 5%的機率會被誤檢而呈現陽性反應，假設該工廠有 1%的“小太陽果汁”含有 $DEHP$，今從該工廠任意拿一瓶“小太陽果汁”做檢驗，則下列哪些是正確的？

(A) 檢驗結果呈陽性反應的機率爲 $\frac{585}{10000}$

(B) 若檢驗結果呈陽性反應，則該果汁含 $DEHP$ 的機率超過 50%

(C) 若檢驗結果呈陽性反應，則該果汁含 $DEHP$ 的機率小於 20%

(D) 若檢驗結果呈陰性反應，則該果汁不含 $DEHP$ 的機率超過 98%

解析

(A) $\frac{1}{100}\times\frac{90}{100}+\frac{99}{100}\times\frac{5}{100}=\frac{585}{10000}$

(B)(C) $\frac{\frac{1}{100}\times\frac{90}{100}}{\frac{585}{10000}}=\frac{90}{585}=\frac{2}{13}<20\%$

(D) $\frac{\frac{99}{100}\times\frac{95}{100}}{\frac{1}{100}\times\frac{10}{100}+\frac{99}{100}\times\frac{95}{100}}=\frac{9405}{9415}>0.98$

4.(C;D)

一副撲克牌有 52 張，分成四種花色，即黑桃、梅花、紅心、磚塊，每種花色又有 13 個點數，即 $2,3,4,\cdots,10,J,Q,K,A$，每種花色都有數字牌(2～10)，英文牌四張，若其中甲爲紅心 3，乙爲黑桃 J，則下列選項何者正確？

(A) 今從 52 張撲克牌中任意取一張，則甲被抽中的機會大於乙被抽中的機會

(B) 今從 52 張撲克牌中任意取兩張，則甲被抽中的機會大於乙被抽中的機會

(C) 今從 52 張撲克牌中任意取兩張，則甲與乙至少被抽中一張的機率爲 $\frac{101}{1326}$

(D) 今從 52 張撲克牌中任意取兩張，則兩張均爲數字牌的機率大於兩張均爲英文牌的機率

(E) 今從 52 張撲克牌中任意取兩張，則兩張是同花色的機率是 $\frac{1}{17}$

解析

(A) 甲、乙被抽中的機會相同

(B) 甲、乙被抽中的機會相同

(C) $P(甲\cup乙)=\frac{n(甲\cup乙)}{全}=\frac{n(甲)+n(乙)-n(甲\cap乙)}{全}$

$$=\frac{1\times51+1\times51-1}{C_2^{52}}=\frac{101}{1326}$$

(D) $\frac{C_2^{36}}{C_2^{52}}>\frac{C_2^{16}}{C_2^{52}}\Rightarrow$ 兩張均爲數字牌的機率大於兩張均爲英文牌的機率

(E) 同花色的機率爲 $\frac{C_1^4\times C_2^{13}}{C_2^{52}}=\frac{4}{17}$

三、選填題

5.(7;8)

黃再鴻申辦提款卡時，依銀行規定須自訂 4 個阿拉伯數字排成一組密碼，某天提款時發現他忘了正確密碼，只記得是由 2, 4, 6, 8 四個數字排成的，提款機設定當輸入的密碼錯誤達三次時，會沒收該提款卡，黃再鴻嘗試輸入不同密碼，則他的提款卡會被沒收的機率是 $\dfrac{①}{②}$。

解析

$$\frac{4!-1}{4!}\times\frac{4!-2}{4!-1}\times\frac{4!-3}{4!-2}=\frac{21}{24}=\frac{7}{8}$$

6.(7;4;4)

一年 12 個月分中，有 7 個月分為大月、5 個月分為小月，今從 12 個月分中分次抽出相異的 3 個月，依序為大月、小月、大月的機率為 $\dfrac{①}{②③}$。

解析

（法一）

$$\frac{C_2^7\times C_1^5\times 2!}{C_3^{12}\times 3!}=\frac{7}{44}$$

（法二）

$$\frac{7\times 5\times(7-1)}{12\times 11\times 10}=\frac{7}{44}$$

7.(4;1;5)

某社團有高一、高二、高三學生，依序占了 50%、40%、10%，且此社團的高一、高二、高三學生中各有 30%、60%、10%參加其他副社，今任抽一位學生擔任社長，在已知此人沒有參加其他副社的條件下，求此人是高二學生的機率為 $\dfrac{①}{②③}$。

解析

$$\frac{0.4\times(1-0.6)}{0.5\times(1-0.3)+0.4\times(1-0.6)+0.1\times(1-0.1)}=\frac{0.16}{0.6}=\frac{4}{15}$$

8.(2;0;2;1)

交通規則測驗時，答對有兩種可能，一種是會做而答對，一種是不會做但猜對。已知黃再鴻練習交通規則筆試測驗，會做的機率是 0.8。現有一題 5 選 1 的交通規則選擇題，設黃再鴻會做就答對，不會做就亂猜。已知此題黃再鴻答對，試問在此條件之下，此題黃再鴻是因會做而答對（不是亂猜）的機率是 $\dfrac{①②}{③④}$。

解析

由於是單選題，猜對的機率爲 $\dfrac{1}{5}$，故所求 $=\dfrac{0.8}{0.8+0.2\times\dfrac{1}{5}}=\dfrac{0.8}{0.84}=\dfrac{20}{21}$

9.(2;1;0;5)

盒中裝有 10 個外形及大小都相同的物品，其中 4 個爲劣級品。現從中隨機抽取一個測試，測試後不放回，直到找出這 4 個次級品爲止，那麼第 5 次測試時發現第 4 個次級品的機率爲 $\dfrac{①}{②③④}$。

解析

第 5 次找到第 4 個次級品，即前面 4 次有 3 個次級品跟 1 個成品，故機率爲 $\dfrac{\dfrac{4!}{3!1!}\times\dfrac{5!}{5!}}{\dfrac{10!}{4!6!}}=\dfrac{2}{105}$

10.(3;1;6)

喜德在學校考試的時候看到下面的題目時，發現自己都不會，只好隨意猜，請問喜德恰好猜對 2 題的機率爲 $\dfrac{①}{②③}$。

連連看：		
今有 5 個球, 3 個箱子，請將題目的正確答案連起來：		
(1) 球相同，箱子相同，球全部放入箱子。	●	●5
(2) 球相同，箱子不同，球全部放入箱子。	●	●41
(3) 球不同，箱子相同，球全部放入箱子。	●	●21
(4) 球不同，箱子不同，球全部放入箱子。	●	●243
(5) 球相同，箱子不同，球全部放入箱子，每一箱至少一球。	●	●6
(6) 球不同，箱子不同，球全部放入箱子，每一箱至少一球。	●	●150

解析

$$\frac{C_2^6\times 4!(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!})}{6!}=\frac{3}{16}$$

11.(1;3;4;0)

現今社會有毒添加劑盛行，常讓人在不知情的情況下受到傷害。現有 A 、 B 兩家飲料店皆只進貨甲、乙、丙三種原料，卻不知甲原料已遭受到有毒添加劑的汙染。已知 A 、 B 兩店在製作飲料時，每種飲料皆只使用甲、乙、丙三種原料中的一種。而在 A 店，選到甲原料的機率爲選到乙原料的兩倍，選到丙原料的機率亦爲選到乙原料的兩倍。在 B 店，選到甲原料的機率爲選到乙原料的一半，選到丙原料的機率亦爲選到乙原料的一半。現有一人欲買一杯飲料，選擇到 A 或 B 飲料店購買的機會相同，試回答下列問題：

其購買的飲料遭受有毒添加劑汙染的機率爲 $\underline{\dfrac{①②}{③④}}$。

解析

選擇到 A 店或 B 店購買的機率均爲 $\frac{1}{2}$，到 A 店買甲飲料的機率爲 $\frac{2}{5}$，到 B 店買甲飲料的機率爲 $\frac{1}{4}$，故所求 $=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{13}{40}$

12.(8;1;3)

承上題

此受有毒添加劑汙染的飲料來自 A 店之機率爲 $\underline{\dfrac{①}{②③}}$。

解析

$$\frac{P(\text{有毒}\cap A)}{P(\text{有毒})}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}}{\frac{13}{40}}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{13}{40}}=\frac{8}{13}$$

13.(3;8)

狡兔有三窟 A 窟、B 窟、C 窟，其習性爲：每日夜晚，此兔會決定隔天要繼續留在原窟，或移動至另兩窟之一，而隔日留在原窟的機率爲 $\frac{1}{2}$，移動至另兩窟之機率分別爲 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{4}$。

例如若當日在 A 窟，則隔日在 A 窟之機率爲 $\frac{1}{2}$，移動至 B 窟、C 窟之機率分別爲 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{4}$。

已知第一日此狡兔在 A 窟，試回答下列問題：

第三日仍在 A 窟之機率 $=\underline{\dfrac{①}{②}}$。

解析

第三天留在 A 的機率爲 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4})\times 2=\frac{3}{8}$

14.(1;7;1;5;1;2)

承上題

第六日仍在A窟之機率$=\dfrac{①②③}{④⑤⑥}$。

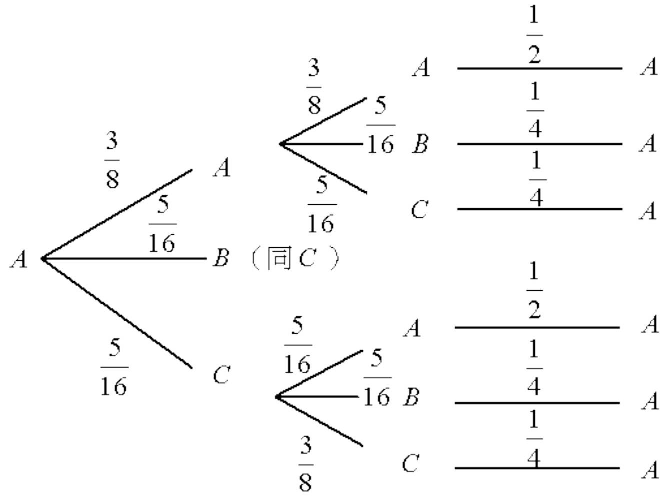
解析

兔子兩天後留在同窟的機率爲$\dfrac{3}{8}$

故$A\xrightarrow{\text{兩天後}}A$，$B\xrightarrow{\text{兩天後}}B$，$C\xrightarrow{\text{兩天後}}C$機率均爲$\dfrac{3}{8}$

$\Rightarrow$兔子兩天後留在另外二窟的機率皆爲$(1-\dfrac{3}{8})\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{16}$

畫出兔子第 1、3、5、6 天的各種情況及機率之樹狀圖



第六天兔子在A窟的機率爲

$\dfrac{3}{8}\times\dfrac{3}{8}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{8}\times\dfrac{5}{16}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{8}\times\dfrac{5}{16}\times\dfrac{1}{4}+2\times(\dfrac{5}{16}\times\dfrac{5}{16}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{16}\times\dfrac{5}{16}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{16}\times\dfrac{3}{8}\times\dfrac{1}{4})$

$=\dfrac{66}{2^9}+\dfrac{105}{2^9}=\dfrac{171}{2^9}=\dfrac{171}{512}$

15.(3;8)

某電碼是由「·」或「-」組成，例如「··-」、「-·-」、「--·」，且此三個均代表不同的電碼。一個電碼的長度定義爲：$2\times$(「·」的個數)$+1\times$(「-」的個數)。例如電碼「···-」的長度爲$2\times3+1=7$。今有一長度爲 5 的電碼，試問此電碼是由 2 個「·」與 1 個「-」組成的機率爲$\dfrac{①}{②}$。

解析

由於長度爲 5, 「·」的個數最多爲 2

$$\left.\begin{aligned} 5 &= 2\times 0+5 \quad 編碼：----- \quad 有 1 種 \\ &= 2\times 1+3 \quad 編碼：·--- \quad 有 \frac{4!}{3!}=4 種 \\ &= 2\times 2+1 \quad 編碼：··- \quad 有 \frac{3!}{2!}=3 種 \end{aligned}\right\} 1+4+3=8 種$$

故由 2 個「·」與 1 個「-」組成的機率爲 $\frac{3}{8}$

16.（1;0;5;1;0;2;4）

跆拳道擂台賽, 比賽過程是甲、乙二校各派 7 名選手, 按甲、乙二校事先安排好之順序出場比賽, 雙方先由 1 號隊員出賽, 敗者遭淘汰, 敗方再派 2 號出場迎戰勝方之 1 號, 以此類推, 直到一方 7 名選手全部淘汰爲止, 則另一方獲勝。

問甲校由第 5 號選手取得勝利之機率爲 $\frac{①②③}{④⑤⑥⑦}$。（假設甲、乙兩校選手獲勝機率皆爲 $\frac{1}{2}$ ）

解析

甲、乙兩校選手獲勝機率皆爲 $\frac{1}{2}$

若甲校由第 5 號選手勝出, 則甲校必定經過 4 敗 7 勝, 且最後一場勝

$\Rightarrow$ 機率爲 $(\frac{1}{2})^{4+7}\cdot C_4^{4+7-1}=\frac{105}{1024}$

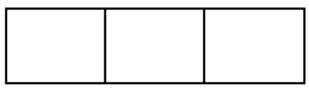
17.（1;1;3;6）

投擲一個公正骰子三次, 設其出現的點數依次爲 x, y, z , 試回答下列問題：

$(x-y)(y-z)=0$ 的機率爲 $\frac{①②}{③④}$。

解析

相當於求右圖的著色法, 假設每格有 6 種塗法且由左而右開始塗, 若相鄰異色則總共有 $6\times 5\times 5$, 因此滿足題意的方法數有 $6^3-6\times 5\times 5=66\Rightarrow$ 機率爲 $\frac{66}{6^3}=\frac{11}{36}$



18.（6;1;2;1;6）

承上題

x, y, z 中最大者爲 5 的機率爲 $\frac{①②}{③④⑤}$。

解析

x, y, z 中最大者爲 5 ⇒ 沒有出現 6，且可能出現 1 個 5 或 2 個 5 或 3 個 5，共有

$C_1^3 \times 4^2 + C_2^3 \times 4 + C_3^3 = 61$ 種情形，故所求機率 $= \dfrac{61}{6^3} = \dfrac{61}{216}$

19.(3;2;0)

承上題

將 x, y, z 作成一三位數 xyz，則在 x, y, z 均相異的條件下，此三位數 xyz 爲 9 的倍數的機率爲 $\dfrac{①}{②③}$。

解析

$1 \le x \le 6, 1 \le y \le 6, 1 \le z \le 6$

$\Rightarrow 3 \le x + y + z \le 18$

三位數 xyz 是 9 的倍數 $\Rightarrow x + y + z = 9$ 或 18

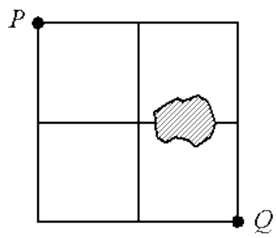
x, y, z 相異 $\Rightarrow (x, y, z)$ 可能爲 $(1, 2, 6)$、$(1, 3, 5)$、$(2, 3, 4)$ 的排列情形

$\Rightarrow (x, y, z)$ 有 $3! \times 3 = 18$ 個解

$\therefore$ 機率爲 $\dfrac{18}{6 \times 5 \times 4} = \dfrac{3}{20}$

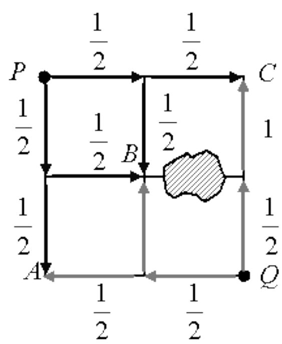
20.(5;1;6)

有街道如圖（每一小方格皆爲正方形），甲自 P 往 Q，乙自 Q 往 P，兩人同時出發以相同速度，沿最短距離前進，且不經過斜線區域。假設在每一分叉路口時，選擇前進方向的機率都相等，問甲、乙二人在路上相遇的機率爲 $\dfrac{①}{②③}$。



解析

如右圖，兩人能交會的點只有 A、B、C 三點



在 A 點相遇的機率：$(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) = \frac{1}{16}$

在 B 點相遇的機率：$(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) = \frac{2}{16}$

在 C 點相遇的機率：$(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2} \times 1) = \frac{2}{16}$

故在路上相遇的機率爲 $\frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{2}{16} = \frac{5}{16}$