段考錦囊

年級：高中一年級

範圍：下學期第一次段考

科目：數學

重點整理

一、一分鐘準備段考

- 基本定義和題型要「熟」，不是只要「會」
- 解出一題難題勝過解十題簡單的題目，不要逃避不會的題目
- 多做題目，培養對題型的解題感覺
- 利用名師學院系列產品，反覆觀看、補強弱點

二、重點回顧

一、 數列與級數

1. 等差數列：$a_n - a_{n-1} = d$，$\{a_n\}$是一個公差為“d ”的等差數列。

2. 等差級數：$\{a_n\}$為等差數列，前 n 項和稱為等差級數。

(1) $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

$$= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad \left(\frac{項數\times[首項+末項]}{2} \right)$$

$$= \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2} \quad \left(\frac{項數\times[兩倍首項+(項數-1)\times公差]}{2} \right)$$

(2) 前 n 項和 S_n，則$\begin{cases} a_1 = S_1 \\ a_n = S_n - S_{n-1}，n \geq 2 \end{cases}$ （此式對所有級數都適用）

(3) $\underbrace{a_1，a_2，\cdots，a_n}_{S_n}，\underbrace{a_{n+1}，\cdots，a_{2n}}_{S_{2n}-S_n}，\underbrace{a_{2n+1}，\cdots，a_{3n}}_{S_{3n}-S_{2n}}，\cdots，$

每 n 項和成等差數列。

3. 等比數列：$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = r，r \neq 0$，$\{a_n\}$是一個公比為 r 的等比數列。

4. 等比級數：$\{a_n\}$為等比數列，前 n 項和稱為等比級數。

(1) $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r} \Rightarrow \dfrac{首項(1-公比^{項數})}{1-公比}$，但 $r \neq 1$

(2) $\underbrace{a_1，a_2，\cdots，a_n}_{S_n}，\underbrace{a_{n+1}，\cdots，a_{2n}}_{S_{2n}-S_n}，\underbrace{a_{2n+1}，\cdots，a_{3n}}_{S_{3n}-S_{2n}}，\cdots，$

每 n 項和成等比數列。

5. 給定一數列 $\{a_n\}$ ，已知

(1) 前幾項（如a_1）的值；
(2) a_n與相鄰項（如a_{n-1}）的關係為$a_n = pa_{n-1} + q$，其中$n \in N, n \ge 2$
且p與q可為常數或n的函數；
則$a_n = pa_{n-1} + q$稱為該數列的一階遞迴關係式

6. 求算一階遞迴關係式 $a_{n+1} = pa_n + q$ 的數列通式時，依據 p、q 的不同，有下列三種常見的方法：

(1) 當$p = 1, q \ne 0$時，即型如$a_{n+1} = a_n + f(n)$的關係式。
可利用累加法找通式。
(2) 當$p \ne 1, q = 0$時，即型如$a_{n+1} = a_n \cdot f(n)$的關係式。
可利用累乘法找通式。
(3) 當$p \ne 1$時，則可先找出一適當值α後，將遞迴關係式表示成
$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$，再利用累乘法找通式。

7. 給定一數列，已知：

(1) 前幾項（如a_1、a_2）的值；
(2) a_n與前後相鄰二項（如a_{n-1}、a_{n-2}）的關係為$a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$，
其中$n \in N, n \ge 3, \beta \ne 0$；
則$a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$稱為該數列的二階遞迴關係式。

8. 數學歸納法：
(1) 步驟 1：驗證 n = 1 時敘述正確。
步驟 2：假設 n = k 的敘述正確，然後推論 n = k +1 的敘述也正確。
(2) 注意驗證、假設後推論這兩步驟缺一不可。

9. Σ的性質：

(1) $\sum_{k=1}^{n} C = \overbrace{\underset{k=1}{C} + \underset{k=2}{C} + \cdots + \underset{k=n}{C}}^{\text{共}n\text{項}} = nC$ （$\sum$(常數) = 項數 × 常數）

(2) $\sum (a_k \pm b_k) = \sum a_k \pm \sum b_k$ （加減可拆）

(3) $\sum \alpha \cdot a_k = \alpha \sum a_k$ （係數可提）

(4) $(a_1b_1 + a_2b_2) \ne (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) \Rightarrow \sum a_k b_k \ne \sum a_k \cdot \sum b_k$

(5) $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} \ne \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} \Rightarrow \sum \frac{a_k}{b_k} \ne \frac{\sum a_k}{\sum b_k}$

10. 常用公式：

(1) $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = 1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

(4) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

精選試卷及詳解

高一數學下數列與級數段考

範圍：　　數列與級數　　　　　　　　考試日期：　2015/02/10
適用年級：　高中一年級　　　　　　　　適用科目：　數學
題型：　　單選題：18題　多選題：2題

一、單選題

1.(　)
有一等差數列$\langle a_n\rangle$，其公差為負，S_n表此數列之前n項和。若$|a_8|=|a_{13}|$，則當n為多少時，S_n有最大值？
(A) 9　(B) 10　(C) 11　(D) 12　(E) 13

2.(　)
下列選項何者正確？
(A) $\sum_{k=1}^{n}k=\sum_{i=1}^{n}(i+1)$　(B) $\sum_{k=1}^{n}n=\frac{n(n+1)}{2}$　(C) $\sum_{k=1}^{n}n=n^2$
(D) $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\sum_{k=1}^{n}(k+1)$　(E) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}k}$

3.(　)
一數列$\langle a_n\rangle$的前n項和$S_n=3n^2+2n-5$，而一般項以a_n表示，則下列何者正確？
(A) $a_n=6n-1$　(B) $a_1=5$　(C) $a_5=80$
(D) 此級數是公差為6的等差級數　(E) $\sum_{k=2}^{10}a_k=315$

4.(　)
求$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=2}^{6}(2i+3j-1)=$？
(A) 421　(B) 423　(C) 425　(D) 427　(E) 429

5.(　)
求$3^2+7^2+11^2+15^2+\cdots+35^2+39^2=$？
(A) 5690　(B) 5700　(C) 5710　(D) 5720　(E) 5730

6.(　)

數列$\langle a_n \rangle$滿足：$a_1=1^2, a_2=1^2-2^2, a_3=1^2-2^2+3^2, \cdots, a_n=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot n^2$,

試回答以下問題：

$a_9=$？

(A) 43　(B) 45　(C) 47　(D) 49　(E) 51

7.(　)

承上題

$\sum_{k=1}^{29} a_k=$？

(A) 222　(B) 223　(C) 224　(D) 225　(E) 226

8.(　)

試求級數$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}$的和=？

(A) $\frac{n}{n+1}$　(B) $\frac{2n}{n+1}$　(C) $\frac{n}{2n+1}$　(D) $\frac{2n}{2n+1}$　(E) $\frac{n}{3n+1}$

9.(　)

在 1 與 19 間插入 $2n$ 個數, 使其成爲$(2n+2)$項之等差數列, 設公差爲d, 若使此數列前$n+1$項之和與後$n+1$項之和的比爲 1：3, 求$n+d$之值=？

(A) 6　(B) 7　(C) 8　(D) 9　(E) 10

10.(　)

在 3 與 27 之間插入 2009 個相異正數$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2009}$, 使得$3, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2009}, 27$形成一個等比數列, 若此 2009 個正數$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2009}$的乘積爲$3^m$, 則正整數$m=$？

(A) 4012　(B) 4014　(C) 4016　(D) 4018　(E) 4020

11.(　)

觀察下列數列的規則：$\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{5}, \frac{3}{3}, \frac{5}{1}, \frac{1}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}, \frac{7}{1}, \cdots$, 依此規則, 試回答以下問題：

求第 103 項=？

(A) $\frac{20}{8}$　(B) $\frac{21}{7}$　(C) $\frac{22}{6}$　(D) $\frac{23}{5}$　(E) $\frac{24}{4}$

12.(　)

承上題

前 103 項之乘積＝？

(A) $\frac{1}{225}$　(B) $\frac{1}{235}$　(C) $\frac{1}{240}$　(D) $\frac{1}{245}$　(E) $\frac{1}{250}$

13.(　)

設 n 爲自然數，若等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項爲 $a_1 = 3$，前 n 項和爲 S_n，且 $\frac{S_{12}}{S_6} = \frac{63}{64}$，則此數列第 7 項 $a_7 =$ ？

(A) $-\frac{3}{64}$　(B) $\frac{3}{64}$　(C) $-\frac{3}{32}$　(D) $\frac{3}{32}$　(E) $-\frac{3}{16}$

14.(　)

圓 C_1 的半徑 1，做 C_1 的內接正三角形 T_1，再作 T_1 的內切圓 C_2，依此類推，可得 $C_1, C_2, C_3, \cdots$，若 $\frac{4\pi}{3} - [\sum_{k=1}^{n} (C_k \text{面積})] < 0.0001$，則自然數 n 的最小值＝？

(A) 10　(B) 11　(C) 7　(D) 9　(E) 8

15.(　)

將一些正整數，依照下列(1)(2)(3)之規則填寫，如下圖所示：

(1) 第 1 列只有 1 個數字 1；

(2) 當 $n \geq 2$ 且 n 爲正整數，第 n 列就有 n 個正整數，且第 n 列的頭尾（兩側）兩數均爲 n；

(3) 第 3 列起（含第 3 列），依下列圖示之箭頭方向，第 n 列中央的 $n-2$ 個數來自前一列兩數之和

第 1 列：　1

第 2 列：　2　2

第 3 列：　3　4　3

第 4 列：　4　7　7　4

第 5 列：　5　11　14　11　5

第 6 列：　6　16　25　25　16　6

⋮

⋮

依此類推繼續往下寫。

試問：第 100 列由左而右的第 2 個數字爲？

(A) 4951　(B) 4952　(C) 4953　(D) 4954　(E) 4955

16.(　)

觀察下列3×3, 4×4, 5×5與6×6方格中的數字規律：

2	2	2
2	4	2
2	2	2

2	2	2	2
2	4	4	2
2	4	4	2
2	2	2	2

2	2	2	2	2
2	4	4	4	2
2	4	6	4	2
2	4	4	4	2
2	2	2	2	2

2	2	2	2	2	2
2	4	4	4	4	2
2	4	6	6	4	2
2	4	6	6	4	2
2	4	4	4	4	2
2	2	2	2	2	2

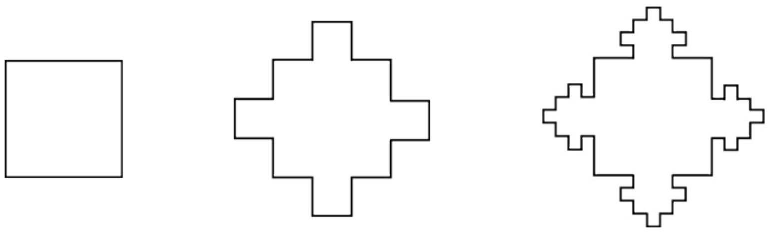
如果在20×20的方格上，仿上面規律填入數字，則所填入的 400 個數字之總和＝？

(A) 3070　(B) 3080　(C) 3090　(D) 4000　(E) 4010

17.(　)

在邊長爲 1 的正方形中，在每邊中央的三分之一處向圖形外做正方形（如下圖）。如此操作，設第一個圖形的周長爲a_1，第二個圖形的周長爲$a_2,\cdots$，第n個圖形的周長爲a_n，求

$a_n=$？



(A) $4+\frac{5}{3}(n-1)$　(B) $4+\frac{8}{3}(n-1)$　(C) $4+\frac{11}{3}(n-1)$　(D) $2+\frac{5}{3}(n-1)$　(E) $2+\frac{8}{3}(n-1)$

18.(　)

設數列$<a_n>$的首項$a_1=3$且滿足遞迴關係式：$a_n=a_{n-1}+2^{n-1}-5n+1, n\geq 2$，求$a_{10}=$？

(A) 764　(B) 765　(C) 766　(D) 767　(E) 768

二、多選題

19.(　)

下列敘述何者恆成立？

(A) 前 4 項爲 1, 2, 3, 4 的數列的第 5 項爲 5

(B) 前 4 項爲 2, 4, 8, 16 的等比數列的第 5 項爲 32

(C) 數列$<a_n>$中，$a_n=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(2n-1)^2-(2n)^2$，則第$k$項爲$(2k-1)^2-(2k)^2$

(D) 數列$<a_n>$爲等差數列，則數列$<{a_n}^2>$亦爲等差數列

(E) 數列$<a_n>$爲等比數列，則數列$<{a_n}^2>$亦爲等比數列

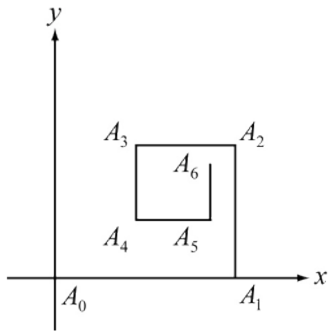
20.(　)

如右圖中各線段均爲水平或鉛直線段，$\overline{A_0A_1}=1$，且

$\overline{A_nA_{n+1}}=\dfrac{3}{4}\overline{A_{n-1}A_n}$，則點$A_6$的坐標$=(a,b)$，則下列何者正確？

(A) $a=\dfrac{193}{128}$ (B) $a=\dfrac{193}{256}$ (C) $b=\dfrac{579}{1024}$

(D) $b=\dfrac{579}{2048}$ (E) $b=\dfrac{579}{4096}$



高一數學下數列與級數段考

範圍：　數列與級數　　考試日期：　2015/02/10
適用年級：　高中一年級　　適用科目：　數學

題型：　單選題：18題　多選題：2題

一、單選題

1. (B)

有一等差數列$\langle a_n\rangle$，其公差為負，S_n表此數列之前n項和。若$|a_8|=|a_{13}|$，則當n為多少時，S_n有最大值？

(A) 9　(B) 10　(C) 11　(D) 12　(E) 13

解析

若首項≤ 0且公差<0，則$|a_8|\neq|a_{13}|$（矛盾），故首項$a>0$

$$|a_8|=|a_{13}| \Rightarrow a_8=-a_{13} \Rightarrow a+7d=-(a+12d) \Rightarrow d=\frac{-2}{19}a \Rightarrow \frac{-a}{d}=9.5$$

S_n有最大值$\Leftrightarrow a_n\geq 0$，即$a+(n-1)d\geq 0 \Rightarrow n-1\leq\frac{-a}{d}=9.5 \Rightarrow n=10$

故選(B)

2. (C)

下列選項何者正確？

(A) $\sum_{k=1}^{n}k=\sum_{i=1}^{n}(i+1)$　(B) $\sum_{k=1}^{n}n=\frac{n(n+1)}{2}$　(C) $\sum_{k=1}^{n}n=n^2$

(D) $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\sum_{k=1}^{n}(k+1)$　(E) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}k}$

解析

(A) $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+\cdots+n\neq 2+3+\cdots+n+(n+1)=\sum_{i=1}^{n}(i+1)$

(B) $\sum_{k=1}^{n}n=n+n+\cdots+n=n^2\neq\frac{n(n+1)}{2}$

(C) $\sum_{k=1}^{n}n=n+n+\cdots+n=n^2$

(D) 令$n=2$，$\sum_{k=1}^{2}k(k+1)=1\times 2+2\times 3\neq(1+2)\times(2+3)=\sum_{k=1}^{2}k\cdot\sum_{k=1}^{2}(k+1)$

(E) 令$n=2$，$\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\neq\frac{1}{3}=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{\sum_{k=1}^{2}k}$

故選(C)

3. (E)

一數列$< a_n >$的前n項和$S_n=3n^2+2n-5$，而一般項以a_n表示，則下列何者正確？

(A) $a_n=6n-1$ (B) $a_1=5$ (C) $a_5=80$

(D) 此級數是公差爲 6 的等差級數 (E) $\sum_{k=2}^{10}a_k=315$

解析

(A) 當$n\geq 2$時，$a_n=S_n-S_{n-1}=(3n^2+2n-5)-[3(n-1)^2+2(n-1)-5]$

$\Rightarrow a_n=3[n^2-(n-1)^2]+2[n-(n-1)]=6n-1$

當$n=1$時，$a_1=S_1=3\times 1^2+2\times 1-5=0\neq 5=6\times 1-1$

(B) $a_1=S_1=3\cdot 1^2+2\cdot 1-5=0$

(C) $a_5=6\cdot 5-1=29$

(D) $a_1=0$，$a_2=6\times 2-1=11$，$a_3=6\times 3-1=17\Rightarrow < a_n >$非等差數列，$S_n$非等差級數

(E) $\sum_{k=2}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}a_k-a_1=S_{10}-a_1=(3\cdot 10^2+2\cdot 10-5)-0=315$

故選(E)

4. (C)

求$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=2}^{6}(2i+3j-1)=$ ？

(A) 421 (B) 423 (C) 425 (D) 427 (E) 429

解析

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=2}^{6}(2i+3j-1)=\sum_{i=1}^{5}(2\sum_{j=2}^{6}i+3\sum_{j=2}^{6}j-\sum_{j=2}^{6}1)=\sum_{i=1}^{5}(10i+60-5)=10\sum_{i=1}^{5}i+60\times 5-5\times 5$$

$$=150+300-25=425$$

故選(C)

5. (E)

求$3^2+7^2+11^2+15^2+\cdots+35^2+39^2=$ ？

(A) 5690 (B) 5700 (C) 5710 (D) 5720 (E) 5730

解析

$3^2+7^2+11^2+15^2+\cdots+35^2+39^2$

$=\sum_{k=0}^{9}(3+4k)^2=\sum_{k=0}^{9}(9+24k+16k^2)$

$=9\times 10+24\sum_{k=0}^{9}k+16\sum_{k=0}^{9}k^2=90+1080+4560=5730$

故選(E)

6.(B)

數列< a_n >滿足： $a_1=1^2, a_2=1^2-2^2, a_3=1^2-2^2+3^2, \cdots, a_n=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot n^2$,
試回答以下問題：

$a_9=$?

(A) 43 (B) 45 (C) 47 (D) 49 (E) 51

解析

$$a_9=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+9^2=(1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2)-2(2^2+4^2+\cdots+8^2)$$

$$=\sum_{k=1}^{9}k^2-2\sum_{k=1}^{4}(2k)^2=285-240=45$$

故選(B)

7.(D)

承上題

$\sum_{k=1}^{29}a_k=$?

(A) 222 (B) 223 (C) 224 (D) 225 (E) 226

解析

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{29}a_k&=29\times1^2-28\times2^2+27\times3^2-26\times4^2+\cdots+1\times29^2\\&=(29\times1^2+27\times3^2+\cdots+1\times29^2)-(28\times2^2+26\times4^2+\cdots+2\times28^2)\\&=\sum_{k=0}^{14}\{[30-(2k+1)](2k+1)^2\}-\sum_{k=1}^{14}[(30-2k)(2k)^2]\\&=\sum_{k=0}^{14}[30(2k+1)^2-(2k+1)^3-30(2k)^2+(2k)^3]\\&=\sum_{k=0}^{14}\{30[(2k+1)^2-(2k)^2]-(2k+1)^3+(2k)^3\}\\&=\sum_{k=0}^{14}[30(4k+1)-12k^2-6k-1]\\&=\sum_{k=0}^{14}(-12k^2+114k+29)\\&=-12\sum_{k=0}^{14}k^2+114\sum_{k=0}^{14}k+29\sum_{k=0}^{14}1=225\end{aligned}$$

故選(D)

8.(C)

試求級數$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}$的和=？

(A) $\frac{n}{n+1}$ (B) $\frac{2n}{n+1}$ (C) $\frac{n}{2n+1}$ (D) $\frac{2n}{2n+1}$ (E) $\frac{n}{3n+1}$

解析

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{2n-1}}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$$

故選(C)

9.(A)

在1與19間插入$2n$個數，使其成爲$(2n+2)$項之等差數列，設公差爲d，若使此數列前$n+1$項之和與後$n+1$項之和的比爲1：3，求$n+d$之值=？

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

解析

（法一）

後$n+1$項之和比前$n+1$項之和多了$(n+1)\cdot(n+1)d$，

因此

$$(n+1)^2d=(3-1)S_{n+1}=2S_{n+1}=2\cdot\frac{(n+1)[2\times1+(n+1-1)d]}{2}=2(n+1)+n(n+1)d=(n+1)(2+nd)$$
$$\Rightarrow (n+1)^2d=(n+1)(2+nd)\Rightarrow (n+1)d=2+nd\Rightarrow d=2$$
$$19=1+(2n+1)\cdot2\Rightarrow n=4\Rightarrow n+d=4+2=6$$

（法二）

設新數列前$n+1$項和爲S_{n+1}，總和爲S_{2n+2}

$$\Rightarrow (3+1)S_{n+1}=S_{2n+2}$$
$$\Rightarrow 4\times\frac{\cancel{(n+1)}(2+nd)}{2}=\frac{\cancel{(2n+2)}[2+(2n+1)d]}{\cancel{2}}$$
$$\Rightarrow 4+2nd=2+2nd+d\Rightarrow d=2$$
$$19=1+(2n+1)\cdot2\Rightarrow n=4\Rightarrow n+d=4+2=6$$

故選(A)

10.(D)

在3與27之間插入2009個相異正數$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{2009}$，使得$3,a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{2009},27$形成一個等比數列，若此2009個正數$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{2009}$的乘積爲$3^m$，則正整數$m=$？

(A) 4012 (B) 4014 (C) 4016 (D) 4018 (E) 4020

解析

設公比爲r且$r>0$，則$r^{2010}=\dfrac{27}{3}\Rightarrow r^{1050}=\sqrt{9}=3$

$$3\cdot a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_{2009}\cdot 27=3^{2011}r^{\sum_{k=1}^{2010}k}=3^{2011}\cdot r^{2011\times1050}$$
$$=3^{2011}\cdot(r^{1050})^{2011}=3^{2011}\cdot3^{2011}=3^{4022}=3\cdot3^m\cdot3^3=3^{m+4}$$

$\Rightarrow m=4022-4=4018$

故選(D)

11.(D)

觀察下列數列的規則：$\frac{1}{1},\frac{1}{3},\frac{3}{1},\frac{1}{5},\frac{3}{3},\frac{5}{1},\frac{1}{7},\frac{3}{5},\frac{5}{3},\frac{7}{1},\cdots$，依此規則，試回答以下問題：

求第 103 項＝？

(A) $\frac{20}{8}$ (B) $\frac{21}{7}$ (C) $\frac{22}{6}$ (D) $\frac{23}{5}$ (E) $\frac{24}{4}$

解析

將數列分組後可看出規律：$\{\frac{1}{1}\},\{\frac{1}{3},\frac{3}{1}\},\{\frac{1}{5},\frac{3}{3},\frac{5}{1}\},\{\frac{1}{7},\frac{3}{5},\frac{5}{3},\frac{7}{1}\},\cdots$

$\Rightarrow$第k組的數列爲$\{\frac{1}{2k-1},\frac{3}{2k-3},\cdots,\frac{2k-3}{3},\frac{2k-1}{1}\}$

由於$1+2+\cdots+14=\frac{14\cdot15}{2}=105$，故第 103 項在第 14 組數列中倒數第三個

$\Rightarrow$第 103 項爲$\frac{2\times14-5}{5}=\frac{23}{5}$

故選(D)

12.(A)

承上題

前 103 項之乘積＝？

(A) $\frac{1}{225}$ (B) $\frac{1}{235}$ (C) $\frac{1}{240}$ (D) $\frac{1}{245}$ (E) $\frac{1}{250}$

解析

$$1=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_{105}=a_{105}\cdot a_{104}\cdot(a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_{103})=\frac{27}{1}\cdot\frac{25}{3}\cdot(a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_{103})$$

$\Rightarrow a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_{103}=\frac{1}{225}$

故選(A)

13.(A)

設n爲自然數，若等比數列$\langle a_n\rangle$的首項爲$a_1=3$，前n項和爲S_n，且$\dfrac{S_{12}}{S_6}=\dfrac{63}{64}$，則此數列第 7 項$a_7=$？

(A) $-\dfrac{3}{64}$ (B) $\dfrac{3}{64}$ (C) $-\dfrac{3}{32}$ (D) $\dfrac{3}{32}$ (E) $-\dfrac{3}{16}$

解析

$S_{12}=S_6+\sum_{k=7}^{12}a_k=S_6+r^6S_6=(1+r^6)S_6\Rightarrow\dfrac{S_{12}}{S_6}=1+r^6=\dfrac{63}{64}\Rightarrow r^6=-\dfrac{1}{64}$（公比$r$爲複數）

$a_7=a_1\times r^6=3\times(-\dfrac{1}{64})=-\dfrac{3}{64}$

故選(A)

14.(E)

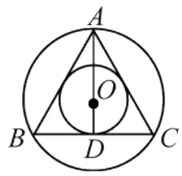
圓C_1的半徑 1，做C_1的內接正三角形T_1，再作T_1的內切圓C_2，依此類推，可得$C_1,C_2,C_3,\cdots$，若$\dfrac{4\pi}{3}-[\sum_{k=1}^{n}(C_k\text{面積})]<0.0001$，則自然數$n$的最小值=？

(A) 10 (B) 11 (C) 7 (D) 9 (E) 8

解析

如右圖由於正三角形重心、內心、外心一致，故$\overline{AO}=2\overline{OD}$

即外接圓半徑爲內切圓半徑之兩倍



C_1面積$=\pi(1)^2=\pi[(\dfrac{1}{2})^{1-1}]^2$，$C_2$面積$=\pi[(\dfrac{1}{2})^{2-1}]^2$，$\cdots$，

C_k面積$=\pi[(\dfrac{1}{2})^{k-1}]^2=\pi(\dfrac{1}{2})^{2k-2}$

$$\Rightarrow\frac{4\pi}{3}-\sum_{k=1}^{n}(C_k\text{面積})=\frac{4\pi}{3}-\pi\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{2})^{2k-2}=\frac{4\pi}{3}-\pi\{\frac{1\cdot[1-(\frac{1}{4})^n]}{1-\frac{1}{4}}\}$$

$$=\frac{4\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}[1-(\frac{1}{4})^n]<0.0001$$

$$\Rightarrow\frac{4\pi}{3}\cdot2^{-2n}<10^{-4}\Rightarrow2^{-2n}<10^{-4}\cdot\frac{3}{4\pi}\Rightarrow2^{2n}>10^4\cdot\frac{4\pi}{3}\Rightarrow2^n>10^2\cdot\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\fallingdotseq204.6$$

$\Rightarrow n\geq8$

$\Rightarrow n$的最小值爲 8

故選(E)

15.(A)

將一些正整數，依照下列(1)(2)(3)之規則填寫，如下圖所示：

(1) 第 1 列只有 1 個數字 1；

(2) 當 $n \geq 2$ 且 n 爲正整數，第 n 列就有 n 個正整數，且第 n 列的頭尾（兩側）兩數均爲 n；

(3) 第 3 列起（含第 3 列），依下列圖示之箭頭方向，第 n 列中央的 $n-2$ 個數來自前一列兩數之和

第 1 列：1

第 2 列：2　2

第 3 列：3　4　3

第 4 列：4　7　7　4

第 5 列：5　11　14　11　5

第 6 列：6　16　25　25　16　6

⋮

⋮

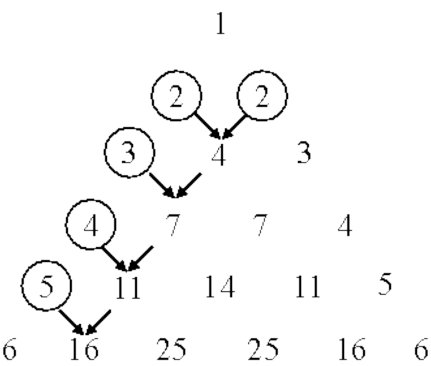
依此類推繼續往下寫。

試問：第 100 列由左而右的第 2 個數字爲？

(A) 4951　(B) 4952　(C) 4953　(D) 4954　(E) 4955

解析

先觀察第 6 列由左而右的第 2 個數字 16 的來源：



$$
\begin{aligned}
16 &= 5+11 \\
&= 5+(4+7) \\
&= 5+[4+(3+4)] \\
&= 5+\{4+[3+(2+2)]\} \\
&= 5+4+3+2+2
\end{aligned}
$$

同理第 100 列由左而右的第 2 個數字爲

$$2+(2+3+\cdots+99)=1+(1+2+3+\cdots+99)=1+\sum_{k=1}^{99}k=1+\frac{99\cdot100}{2}=4951$$

故選(A)

16.(B)

觀察下列 3×3, 4×4, 5×5 與 6×6 方格中的數字規律：

2	2	2
2	4	2
2	2	2

2	2	2	2
2	4	4	2
2	4	4	2
2	2	2	2

2	2	2	2	2
2	4	4	4	2
2	4	6	4	2
2	4	4	4	2
2	2	2	2	2

2	2	2	2	2	2
2	4	4	4	4	2
2	4	6	6	4	2
2	4	6	6	4	2
2	4	4	4	4	2
2	2	2	2	2	2

如果在 20×20 的方格上，仿上面規律填入數字，則所填入的 400 個數字之總和＝？

(A) 3070　(B) 3080　(C) 3090　(D) 4000　(E) 4010

解析

觀察 6×6 方格中的右上角 3×3 方格的數字規律：

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&2\\\hline 4&4&2\\\hline 6&4&2\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&2\\\hline 2&2&2\\\hline 2&2&2\\\hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&0\\\hline 2&2&0\\\hline 2&2&0\\\hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&0\\\hline 0&0&0\\\hline 2&0&0\\\hline\end{array}$$

可知方格中的數字和 $= 2\times9+2\times4+2\times1$

$$= 2\times3^2+2\times2^2+2\times1^2$$

$$= 2\sum_{k=1}^{3}k^2$$

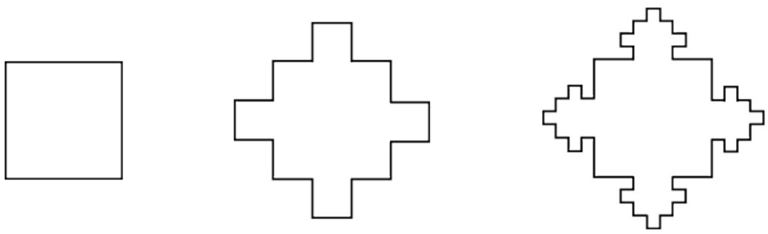
故可推得 20×20 方格中的右上角 10×10 方格的數字和 $= 2\sum_{k=1}^{10}k^2 = 2\times\dfrac{10\times11\times21}{6} = 770$

$\Rightarrow$ 填入的 400 個數字總和爲 $770\times4=3080$

故選(B)

17. (B)

在邊長爲 1 的正方形中，在每邊中央的三分之一處向圖形外做正方形（如下圖）。如此操作，設第一個圖形的周長爲 a_1，第二個圖形的周長爲 $a_2,\cdots$，第 n 個圖形的周長爲 a_n，求 $a_n=$?



(A) $4+\frac{5}{3}(n-1)$　(B) $4+\frac{8}{3}(n-1)$　(C) $4+\frac{11}{3}(n-1)$　(D) $2+\frac{5}{3}(n-1)$　(E) $2+\frac{8}{3}(n-1)$

解析

$a_1=4,\ a_2=4+8\times(\frac{1}{3}),\ a_3=a_2+3\times4\times2\times(\frac{1}{3})^2=a_2+8\times(\frac{1}{3})\Rightarrow a_n=a_{n-1}+\frac{8}{3}$（其中 $n>1$）

$$a_n=\cancel{a_{n-1}}+\frac{8}{3}$$

$$\vdots$$

$$\cancel{a_3}=\cancel{a_2}+\frac{8}{3}$$

$$+)\ \cancel{a_2}=a_1+\frac{8}{3}$$

$$a_n=a_1+\frac{8}{3}\times(n-1)=4+\frac{8}{3}\times(n-1)$$

故選(B)

18.(A)

設數列$<a_n>$的首項$a_1=3$且滿足遞迴關係式：$a_n=a_{n-1}+2^{n-1}-5n+1, n\ge 2$, 求$a_{10}=$?

(A) 764　(B) 765　(C) 766　(D) 767　(E) 768

解析

$$a_n=a_{n-1}+2^{n-1}-5n+1$$

$$\Rightarrow a_n-a_{n-1}=2^{n-1}-5n+1$$

$$\begin{array}{l} a_{10}-a_9=2^9-5\times 10+1 \\ a_9-a_8=2^8-5\times 9+1 \\ \quad\vdots \\ +)\,a_2-a_1=2^1-5\times 2+1 \\ \hline a_{10}-a_1=(2^1+\cdots+2^9)-5(2+\cdots+10)+9 \end{array}$$

$$\Rightarrow a_{10}=3+\sum_{k=1}^{9}2^k-5\sum_{k=2}^{10}k+9$$

$$=3+1022-270+9=764$$

故選(A)

二、多選題

19.(B;E)

下列敘述何者恆成立？

(A) 前 4 項爲 1, 2, 3, 4 的數列的第 5 項爲 5

(B) 前 4 項爲 2, 4, 8, 16 的等比數列的第 5 項爲 32

(C) 數列$<a_n>$中，$a_n=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(2n-1)^2-(2n)^2$，則第$k$項爲$(2k-1)^2-(2k)^2$

(D) 數列$<a_n>$爲等差數列，則數列$<a_n{}^2>$亦爲等差數列

(E) 數列$<a_n>$爲等比數列，則數列$<a_n{}^2>$亦爲等比數列

解析

(A) 反例：1, 2, 3, 4, 6

(B) 已知此數列爲等比數列且公比爲 2，故第 5 項爲$16\times 2=32$

(C) $a_k=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(2k-1)^2-(2k)^2\ne(2k-1)^2-(2k)^2$

(D) 反例：1, 2, 3 爲等差數列，但1^2，2^2，3^2不爲等差數列

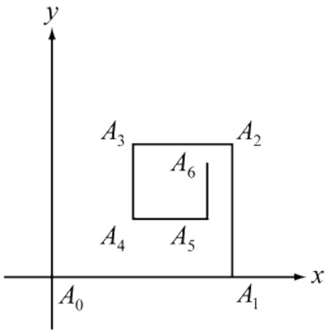
(E) $a_n=a_1r^{n-1}\Rightarrow a_n{}^2=a_1{}^2r^{2n-2}\Rightarrow a_{n-1}{}^2=a_1{}^2r^{2n-4}\Rightarrow \dfrac{a_n{}^2}{a_{n-1}{}^2}=\dfrac{a_1{}^2r^{2n-2}}{a_1{}^2r^{2n-4}}=r^2$

故$<a_n{}^2>$亦爲等比數列

故選(B)(E)

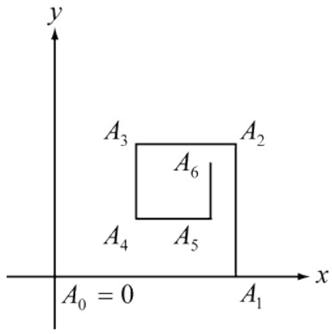
20.(B;C)

如右圖中各線段均爲水平或鉛直線段，$\overline{A_0A_1}=1$，且 $\overline{A_nA_{n+1}}=\frac{3}{4}\overline{A_{n-1}A_n}$，則點 A_6 的坐標 $=(a,b)$，則下列何者正確？



(A) $a=\frac{193}{128}$ (B) $a=\frac{193}{256}$ (C) $b=\frac{579}{1024}$
(D) $b=\frac{579}{2048}$ (E) $b=\frac{579}{4096}$

解析



A_6 的 x 坐標：$\overline{A_0A_1}-\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}=1-(\frac{3}{4})^2+(\frac{3}{4})^4$

$$=1-\frac{9}{4^2}+\frac{81}{4^4}=\frac{193}{256}$$

A_6 的 y 坐標：$\overline{A_1A_2}-\overline{A_3A_4}+\overline{A_5A_6}=\frac{3}{4}-(\frac{3}{4})^3+(\frac{3}{4})^5$

$$=\frac{3}{4}-\frac{27}{4^3}+\frac{243}{4^5}=\frac{579}{1024}$$

A_6 的坐標爲 $(\frac{193}{256},\frac{579}{1024})\Rightarrow a=\frac{193}{256}$，$b=\frac{579}{1024}$

故選(B)(C)