段考錦囊

年級：高中一年級

範圍：上學期第三次段考

科目：數學

重點整理

一、一分鐘準備段考

- 基本定義和題型要「熟」，不是只要「會」
- 解出一題難題，勝過解十題簡單的題目，不要逃避不會的題目
- 多做題目，培養對題型的解題感覺
- 利用名師學院系列產品，反覆觀看、補強弱點

二、重點回顧

指數、對數函數

1.指數律：若 $a>0$、$b>0$，m、$n\in R$，則

(1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

(2) $a^m\div a^n=\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ (其中 $a\neq 0$)

(3) $(a^m)^n=a^{mn}$

(4) $a^m b^m=(ab)^m$

2.指數圖形：$y=f(x)=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$，$x\in R$)，圖形全部在 x 軸上方，且必過(0, 1)，漸近線爲 x 軸。

(1)當 $a>1$ 時，y 爲遞增函數（圖形向右上升）。

(2)當 $0<a<1$ 時，y 爲遞減函數（圖形向右下降）。

3.若 $a>0$，$a\neq 1$，$b>0$ 且 $a^x=b$，則 $x=\log_a b$（其中 a 稱爲底數，b 稱爲真數）。

4.對數性質：

(1) $\log_a m+\log_a n=\log_a mn$（對數相加，真數相乘）

(2) $\log_a m-\log_a n=\log_a \dfrac{m}{n}$（對數相減，真數相除）

(3) $\log_a b^t=t\log_a b$（真數的次方，可提出作係數）

(4) $\log_{a^t} b^s=\dfrac{s}{t}\log_a b$（次方：真數放分子，底數放分母）

(5) $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$（倒數公式）

(6) $\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c$（連鎖律）

(7) $\log_b c=\dfrac{\log_a c}{\log_a b}$（換底公式），其中 a 爲任意底

5.對數圖形：$y=\log_a x$ ($a, x>0$ 且 $a\neq 1$)，圖形全部在 y 軸右方，且必過(1, 0)，漸近線爲 y 軸。

(1)當 $a>1$ 時，y 爲遞增函數。

(2)當 $0<a<1$ 時，y 爲遞減函數。

6.$1\le a<10$，$k\in N$

(1) $x=a\times 10^k\Rightarrow \log x=k+\log a$

(2) $x=a\times 10^{-k}\Rightarrow \log x=-k+\log a$

7. $\log a = n + \alpha$，其中 $n \in Z$（n 爲整數），$0 \le \alpha < 1$（α 爲 0 或正小數）

$$\Rightarrow \begin{cases} n\text{稱爲}\log a\text{的首數} \\ \alpha\text{稱爲}\log a\text{的尾數} \end{cases}$$

8. $a = b \cdot 10^n \left(n \in Z,\ 1 \le b < 10\right) \Rightarrow \log a = \log\left(b \cdot 10^n\right) = \log 10^n + \log b$

9. 首數的應用：

(1) $x \ge 1$

✧log$x$ 的首數爲 n⇔x 的整數部分爲 n+1 位數

✧x 的整數部分有 k 位數⇔ $k-1 \le \log x < k$

(2) $0 < x < 1$，log$x$ 的首數爲 $-n$ ⇔ x 從小數點後第 n 位起不爲 0

10. $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = r$，$r \ne 0$，則 $\{a_n\}$ 是一個公比爲 r 的等比數列。

(1) $a_n = a_1 r^{n-1}$

(2) a、b、c 成等比數列⇔ $ac = b^2$（a、b、c 不等於 0）

11. $\{a_n\}$ 爲等比數列，前 n 項和稱爲等比級數，$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \dfrac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$，$r \ne 1$。($S_n = \dfrac{\text{首項}(1-\text{公比}^{\text{項數}})}{1-\text{公比}}$)

12. 存入本金 a，利率 r，經 n 期後的本利和爲 $a\left(1+r\right)^n$。每期存入 a，利率 r，n 期可領回本利和 $\dfrac{a\left(1+r\right)\cdot\left[\left(1+r\right)^n - 1\right]}{r}$。

精選試卷及詳解

考試日期僅供參考

高一數學上指數、對數函數段考

範圍：	指數、對數函數	考試日期：	2014/12/08
適用年級：	高中一年級	適用科目：	數學

題型：　單選題：6題　多選題：5題　選填題：9題

一、單選題

1.(　)

某日老師在黑板上寫下了一個質數$S=8^{50}-3$，同學們相繼發表她們對S的看法：

小楨說：S的個位數爲3

小莉說：S與2^{150}的位數相同

小慧說：S是45位數

小橙說：S的最高位數爲2

請問以上有幾位同學說的話是正確的？

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

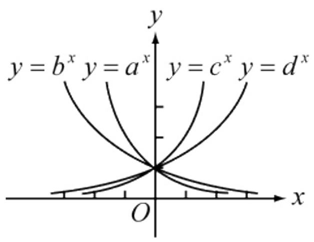
2.(　)

已知$\log 5.37=a$、$\log 5.38=b$，利用內插法可得$\log 5.374$爲下列哪一選項？

(A) $2a+3b$　(B) $3a+2b$　(C) $0.4a+0.6b$　(D) $0.6a+0.4b$　(E) $a+0.4b$

3.(　)

右圖爲$y=a^x$，$y=b^x$，$y=c^x$，$y=d^x$分別在xy平面上的部分圖形，則a、b、c、d四個數之間的大小關係爲



(A) $a>d>b>c$

(B) $c>d>b>a$

(C) $c>a>b>d$

(D) $c>b>d>a$

4.(　)

已知$a=2^{\frac{1}{2}}$，$b=3^{\frac{1}{3}}$，$c=4^{\frac{1}{4}}$，$d=5^{\frac{1}{5}}$，則a、b、c、d各數之間的大小關係爲

(A) $d<b=a<c$　(B) $d<b=c<a$　(C) $b<a=c<d$　(D) $d<a=c<b$

5.(　)

解不等式$(5)^{-4x^2+3x-2}<\frac{1}{125}$，則$x$的範圍爲何？

(A) $x<-\frac{1}{4}$或$x>1$　(B) $x<-\frac{1}{2}$或$x>1$　(C) $x<-\frac{1}{4}$或$x>2$　(D) $-\frac{1}{4}<x<1$

6.(　)
已知$3^{1+2x}+3^{1-2x}-8(3^x+3^{-x})-10<0$，求$3^x+3^{-x}$的範圍爲何？
(A) $2<3^x+3^{-x}<4$　(B) $-\frac{4}{3}<3^x+3^{-x}\le 2$　(C) $-\frac{4}{3}<3^x+3^{-x}<4$　(D) $2\le 3^x+3^{-x}<4$

二、多選題

7.(　)
關於指數、對數的運算，下列選項哪些正確？
(A) $(\log_7 3)(\log_7 4)=1$　(B) $(\log_2 3)^4(\log_3 2)=4$　(C) $3=5^{\log_5 3}=\log_7 7^3$
(D) $5^{\log_6 7}=7^{\log_6 5}$　(E) $\log_{\sqrt{7}}\sqrt{5}=\log_7 5=\log_{49}25$

8.(　)
下列選項哪些正確？
(A) 將$y=2^x$的圖形向右平移 3 單位後，可以得到$y=8\times 2^x$的圖形
(B) 將$y=\log_2 x$的圖形向上平移 3 單位後，可以得到$y=\log_2(8x)$的圖形
(C) $y=2^x$的圖形與$y=\log_2 x$的圖形對稱於直線$y=x$
(D) $y=2^{|x|}$的圖形與$y=\log_2|x|$的圖形對稱於直線$y=x$
(E) 若(a,b)是$y=2^{-x}$圖形上的一點，則(b,a)必爲$y=\log_2\frac{1}{x}$圖形上的一點

9.(　)
下列各選項何者正確？
(A) $\sqrt[3]{0.7}>\sqrt[4]{0.7}$　(B) $2^{(0.5^{0.5})}>2^{0.5}$
(C) $12^{11}>10^{12}$　(D) $\log_2\frac{1}{3}>\log_{\frac{1}{4}}25$
(E) $\log(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot\log(\sqrt{6}-\sqrt{5})=\log(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot\log(\sqrt{6}+\sqrt{5})$

10.(　)
下列敘述何者正確？
(A) $y=(\frac{2}{3})^x$和$y=(\frac{3}{2})^x$的圖形對稱於y軸
(B) $y=2x^2$和$y=2^x$的圖形相交於兩點
(C) 當$a>1$，$y=a^x$和$y=\log_a x$的圖形不會相交
(D) $y=3^{-x}$和$y=-\log_3 x$的圖形對稱於直線$y=x$
(E) $y=\frac{x}{2}$和$y=|\log x|$的圖形相交於兩點

11.(　)
當 $0<x<1$ 時，關於函數 $f(x)=\log_3 x+\log_x 81$ 的敘述，下列何者正確？

(A) $f(\frac{1}{3})=-5$　(B) $f(\frac{1}{2})$ 爲最小值　(C) $f(\frac{1}{9})$ 爲最小值
(D) $f(x)$ 之最大值爲 -4　(E) $f(x)$ 之最小值爲 4

三、選填題

12.(　)
$(\log_{16}625+\log_4 25+\log_{\frac{1}{8}}125)(\log_5 8-\log_{25}16)=$ ① 。

13.(　)
設實數 x 滿足 $\log_x 8-\log_2 x=2$，求 $x=\frac{①}{②}$ 或 ③ 。

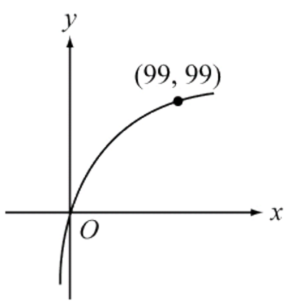
14.(　)
不等式 $\log_{0.2}(x-5)\geq\log_{0.04}(x-3)$ 之解爲 ① $<x\leq$ ② 。

15.(　)
若 $p=\sqrt[3]{1830\times0.376}$，試利用下表求出 p 的近似值爲 0.①②③。（請算至小數點後第三位）

x	1.83	3.76	8.82	8.83
$\log x$	0.2625	0.5752	0.9455	0.9460

16.(　)
若 $2\leq x\leq16$，若 $y=x^{4-\log_2 x}$ 的最大值爲 M，最小值爲 m，求數對 $(M,m)=$ (①② , ③) 。

17.(　)
如右圖，a、b 皆爲實數，函數 $f(x)=a\cdot\log_{100}(x+b)$ 之圖形經過 $(0,0)$、$(99,99)$ 兩點，試回答以下問題：



數對 $(a,b)=$ (①② , ③) 。

18.(　)

承上題

設 t 爲整數，求滿足不等式 $f(t)>t$ 的所有 t 之總和爲 ＿①②③④＿。

19.(　)

阿成向利高銀行貸款 300 萬元買房子，銀行貸款年利率 7%，每年複利一次。阿成計畫 10 年還清貸款，在每年年底償還相同的金額。試問每年必須償還 ＿①②③④ 00＿ 元。（四捨五入取至百位數）

20.(　)

試問 1.44^{100} 的整數部分是 ＿①②＿ 位數。

高一數學上指數、對數函數段考

範圍：	指數、對數函數	考試日期：	2014/12/08
適用年級：	高中一年級	適用科目：	數學
題型：	單選題：6題　多選題：5題　選填題：9題		

一、單選題

1.(A)

某日老師在黑板上寫下了一個質數$S=8^{50}-3$，同學們相繼發表她們對S的看法：

小楨說：S的個位數爲3

小莉說：S與2^{150}的位數相同

小慧說：S是45位數

小橙說：S的最高位數爲2

請問以上有幾位同學說的話是正確的？

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

解析

1° 8^1的個位數爲8

8^2的個位數爲4

8^3的個位數爲2

8^4的個位數爲6

8^5的個位數爲8

$\vdots$

由上可觀察出其個位數字每4個一循環

$\because 50\div 4=12\cdots 2$　$\therefore 8^{50}$的個位數爲4

$\Rightarrow S=8^{50}-3$的個位數爲$4-3=1$

2° $\because 2^{150}=(2^3)^{50}=8^{50}\Rightarrow 2^{150}$的個位數爲4，$S=8^{50}-3$的個位數爲1，且$4-3=1$

$\therefore S$與2^{150}的位數相同

3° $\because \log 2^{150}=150\log 2\fallingdotseq 150\times 0.301=45.15$

$\therefore 2^{150}$是$45+1=46$位數

$\Rightarrow S$是46位數

4° $\log 2^{150}=45.15=45+0.15$

$\Rightarrow 2^{150}$的尾數是0.15

$\because 0.15<0.301=\log 2$

$\therefore 2^{150}$的最高位數<2

$\Rightarrow 2^{150}$的最高位數爲1

故只有小莉的話是正確的

故選(A)

2.(D)

已知$\log 5.37=a$、$\log 5.38=b$，利用內插法可得$\log 5.374$爲下列哪一選項？

(A) $2a+3b$　(B) $3a+2b$　(C) $0.4a+0.6b$　(D) $0.6a+0.4b$　(E) $a+0.4b$

解析

設 $y_0 = \log 5.374$

根據內插法：

$$\frac{5.38-5.37}{5.374-5.37} = \frac{b-a}{y_0 - a}$$

$$\Rightarrow \frac{0.01}{0.004} = \frac{b-a}{y_0-a} \Rightarrow \frac{10}{4} = \frac{b-a}{y_0-a}$$

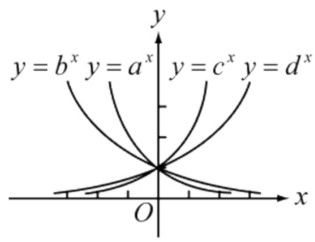
$$\Rightarrow 10y_0 - 10a = 4b - 4a \Rightarrow y_0 = \frac{4b+6a}{10}$$

$$\Rightarrow \log 5.374 \approx \frac{4b+6a}{10} = 0.4b + 0.6a$$

故選(D)

3.(B)

右圖為 $y=a^x$, $y=b^x$, $y=c^x$, $y=d^x$ 分別在 xy 平面上的部分圖形, 則 a 、 b 、 c 、 d 四個數之間的大小關係為



(A) $a>d>b>c$

(B) $c>d>b>a$

(C) $c>a>b>d$

(D) $c>b>d>a$

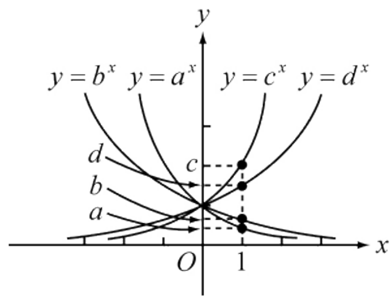
解析

將 $x=1$ 依序代入 $y=a^x$ 、 $y=b^x$ 、 $y=c^x$ 、 $y=d^x$ 中

$\Rightarrow$ 與四個圖形依序交於 $(1, a)$ 、 $(1, b)$ 、 $(1, c)$ 、 $(1, d)$

如圖可知, $c>d>b>a$

故選(B)



4.(D)

已知 $a=2^{\frac{1}{2}}$, $b=3^{\frac{1}{3}}$, $c=4^{\frac{1}{4}}$, $d=5^{\frac{1}{5}}$, 則 a 、 b 、 c 、 d 各數之間的大小關係為

(A) $d<b=a<c$ (B) $d<b=c<a$ (C) $b<a=c<d$ (D) $d<a=c<b$

解析

分別對 a 、 b 、 c 、 d 取log ：

$\log a=\log 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log 2=\frac{1}{2}\times 0.301=0.1505$

$\log b=\log 3^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\log 3=\frac{1}{3}\times 0.4771\fallingdotseq 0.159$

$\log c=\log 4^{\frac{1}{4}}=\log(2^{2})^{\frac{1}{4}}=\log 2^{\frac{1}{2}}=\log a$

$\log d=\log 5^{\frac{1}{5}}=\frac{1}{5}\log 5=\frac{1}{5}\times 0.699=0.1398$

$\because \log d<\log a=\log c<\log b$

$\therefore d<a=c<b$

故選(D)

5.(A)

解不等式 $(5)^{-4x^2+3x-2}<\frac{1}{125}$，則 x 的範圍爲何？

(A) $x<-\frac{1}{4}$ 或 $x>1$　(B) $x<-\frac{1}{2}$ 或 $x>1$　(C) $x<-\frac{1}{4}$ 或 $x>2$　(D) $-\frac{1}{4}<x<1$

解析

$(5)^{-4x^2+3x-2}<\frac{1}{125}\Rightarrow (5)^{-4x^2+3x-2}<5^{-3}$

$\because 5>1$　$\therefore -4x^2+3x-2<-3$

$\Rightarrow -4x^2+3x+1<0$

$\Rightarrow 4x^2-3x-1>0$

$\Rightarrow (4x+1)(x-1)>0$

$\Rightarrow x<-\frac{1}{4}$ 或 $x>1$

故選(A)

6.(D)

已知 $3^{1+2x}+3^{1-2x}-8(3^{x}+3^{-x})-10<0$，求 $3^{x}+3^{-x}$ 的範圍爲何？

(A) $2<3^{x}+3^{-x}<4$　(B) $-\frac{4}{3}<3^{x}+3^{-x}\le 2$　(C) $-\frac{4}{3}<3^{x}+3^{-x}<4$　(D) $2\le 3^{x}+3^{-x}<4$

解析

根據算幾不等式：$\dfrac{3^x+3^{-x}}{2}\geq\sqrt{3^x\cdot3^{-x}}=1\Rightarrow 3^x+3^{-x}\geq2$

$3^{1+2x}+3^{1-2x}-8(3^x+3^{-x})-10<0$

$\Rightarrow 3\cdot3^{2x}+3\cdot3^{-2x}-8(3^x+3^{-x})-10<0$

$\Rightarrow 3\cdot(3^{2x}+3^{-2x})-8(3^x+3^{-x})-10<0$

$\Rightarrow 3\cdot(3^{2x}+2+3^{-2x})-8(3^x+3^{-x})-10-6<0$

$\Rightarrow 3\cdot(3^x+3^{-x})^2-8(3^x+3^{-x})-16<0$（$\because 2=2\cdot3^x\cdot3^{-x}$）

$\Rightarrow [3(3^x+3^{-x})+4][(3^x+3^{-x})-4]<0$

$\Rightarrow -\dfrac{4}{3}<3^x+3^{-x}<4$

但 $3^x+3^{-x}\geq2\Rightarrow 2\leq3^x+3^{-x}<4$

故選(D)

二、多選題

7.(C;D;E)

關於指數、對數的運算, 下列選項哪些正確？

(A) $(\log_7 3)(\log_7 4)=1$ (B) $(\log_2 3)^4(\log_3 2)=4$ (C) $3=5^{\log_5 3}=\log_7 7^3$

(D) $5^{\log_6 7}=7^{\log_6 5}$ (E) $\log_{\sqrt{7}}\sqrt{5}=\log_7 5=\log_{49}25$

解析

(A) $(\log_7 3)(\log_7 4)\neq\log_7(3+4)=\log_7 7=1$

(B) $(\log_2 3)^4(\log_3 2)\neq(\log_2 3^4)(\log_3 2)=(4\log_2 3)(\log_3 2)=4$

(C) $a>0$ 且 $a\neq1\Rightarrow a^{\log_a b}=b$, $\log_a a^b=b$

$\therefore 5^{\log_5 3}=3=\log_7 7^3$

(D) 設 $x=5^{\log_6 7}$, $y=7^{\log_6 5}$

$\Rightarrow \log_6 x=\log_6 5^{\log_6 7}=\log_6 7\log_6 5$

$\log_6 y=\log_6 7^{\log_6 5}=\log_6 5\log_6 7$

$\Rightarrow \log_6 x=\log_6 y$

$\Rightarrow x=y$

$\therefore 5^{\log_6 7}=7^{\log_6 5}$

(E) $\log_{\sqrt{7}}\sqrt{5}=\log_{7^{\frac{1}{2}}}5^{\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\log_7 5=\log_7 5$

$\log_{49}25=\log_{7^2}5^2=\dfrac{2}{2}\log_7 5=\log_7 5$

$\therefore \log_{\sqrt{7}}\sqrt{5}=\log_7 5=\log_{49}25$

故選(C)(D)(E)

8.(B;C;E)

下列選項哪些正確？

(A) 將 $y=2^x$ 的圖形向右平移 3 單位後，可以得到 $y=8\times 2^x$ 的圖形

(B) 將 $y=\log_2 x$ 的圖形向上平移 3 單位後，可以得到 $y=\log_2(8x)$ 的圖形

(C) $y=2^x$ 的圖形與 $y=\log_2 x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$

(D) $y=2^{|x|}$ 的圖形與 $y=\log_2|x|$ 的圖形對稱於直線 $y=x$

(E) 若 (a,b) 是 $y=2^{-x}$ 圖形上的一點，則 (b,a) 必爲 $y=\log_2\dfrac{1}{x}$ 圖形上的一點

解析

(A) 將 $y=f(x)$ 向右平移 a 單位後，可以得到 $y=f(x-a)$ 的圖形

$\therefore$將 $y=2^x$ 的圖形向右平移 3 單位後，可以得到 $y=2^{x-3}=2^x\cdot 2^{-3}=\dfrac{1}{8}\times 2^x$ 圖形

(B) 將 $y=f(x)$ 向上平移 a 單位後，可以得到 $y=f(x)+a$ 的圖形

$\therefore$將 $y=\log_2 x$ 的圖形向上平移 3 單位後，可以得到 $y=\log_2 x+3$ 的圖形

又 $y=\log_2 x+3=\log_2 x+\log_2 8=\log_2(8x)$

$\therefore$正確

(C) 設 $b=2^a$，則 $a=\log_2 b$

$\therefore$ $y=2^x$ 的圖形與 $y=\log_2 x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$

(D) 設 $b=2^{|a|}$，則 $|a|=\log_2 b=\log_2|b|$（$\because b>0$）

若 $a<0$，則 $a\neq|a|=\log_2|b|$

此時 $a=\log_2|b|$ 不成立

$\therefore$兩圖形不對稱於直線 $y=x$

(E) 若 $b=2^{-a}$，則 $\log_2 b=\log_2 2^{-a}$

即 $\log_2 b=-a$

$\Rightarrow a=-\log_2 b=\log_2 b^{-1}$

$\Rightarrow a=\log_2\dfrac{1}{b}$

(b,a) 必爲 $y=\log_2\dfrac{1}{x}$ 圖形上的一點

故選(B)(C)(E)

9.(B;D;E)

下列各選項何者正確？

(A) $\sqrt[3]{0.7}>\sqrt[4]{0.7}$　(B) $2^{(0.5^{0.5})}>2^{0.5}$

(C) $12^{11}>10^{12}$　(D) $\log_2\dfrac{1}{3}>\log_{\frac{1}{4}}25$

(E) $\log(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot\log(\sqrt{6}-\sqrt{5})=\log(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot\log(\sqrt{6}+\sqrt{5})$

解析

(A) $\sqrt[3]{0.7}=(0.7)^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[4]{0.7}=(0.7)^{\frac{1}{4}}$

$\because \dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{3}$ 且 $0<0.7<1$ $\quad \therefore (0.7)^{\frac{1}{4}}>(0.7)^{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow \sqrt[4]{0.7}>\sqrt[3]{0.7}$

(B) $\because$ 底數 $0.5<1$ 且指數 $0<0.5<1$

$\therefore 0.5^{0.5}>0.5^{1}=0.5$

$\because 0.5^{0.5}>0.5$ 且 $2>1$ $\quad \therefore 2^{(0.5^{0.5})}>2^{0.5}$

(C) $\log 12^{11}=11\log 12=11(2\log 2+\log 3)$

$=11\times(2\times 0.301+0.4771)\fallingdotseq 11.87$

$\Rightarrow 12^{11}$ 爲 $11+1=12$ 位數

$\because 10^{12}$ 爲 $12+1=13$ 位數 $\quad \therefore 12^{11}<10^{12}$

(D) $\log_2 \dfrac{1}{3}=\log_2 3^{-1}=-\log_2 3$

$\log_{\frac{1}{4}} 25=\log_{2^{-2}} 5^2=\dfrac{2}{-2}\log_2 5=-\log_2 5$

$\because \log_2 3<\log_2 5 \quad \therefore -\log_2 3>-\log_2 5$

$\Rightarrow \log_2 \dfrac{1}{3}>\log_{\frac{1}{4}} 25$

(E) $\log(\sqrt{3}-\sqrt{2})=\log[\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}]=\log\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\log(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-1}$

$=-\log(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$\log(\sqrt{6}-\sqrt{5})=\log[\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5})}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}]=\log\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}=\log(\sqrt{6}+\sqrt{5})^{-1}$

$=-\log(\sqrt{6}+\sqrt{5})$

$\therefore \log(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot\log(\sqrt{6}-\sqrt{5})=-\log(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot[-\log(\sqrt{6}+\sqrt{5})]$

$=\log(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot\log(\sqrt{6}+\sqrt{5})$

故選(B)(D)(E)

10.(A;B;C;D)

下列敘述何者正確？

(A) $y=(\dfrac{2}{3})^x$ 和 $y=(\dfrac{3}{2})^x$ 的圖形對稱於 y 軸

(B) $y=2x^2$ 和 $y=2^x$ 的圖形相交於兩點

(C) 當 $a>1$，$y=a^x$ 和 $y=\log_a x$ 的圖形不會相交

(D) $y=3^{-x}$ 和 $y=-\log_3 x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$

(E) $y=\dfrac{x}{2}$ 和 $y=|\log x|$ 的圖形相交於兩點

解析

(A) 設 (a,b) 在 $y=(\frac{2}{3})^x$ 上

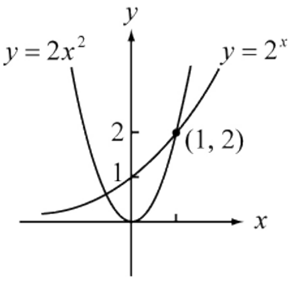
$\Rightarrow b=(\frac{2}{3})^a=[(\frac{2}{3})^{-1}]^a=(\frac{2}{3})^{-a}$

$\Rightarrow (-a,b)$ 必在 $y=(\frac{3}{2})^x$ 圖形上

$\Rightarrow y=(\frac{2}{3})^x$ 和 $y=(\frac{3}{2})^x$ 的圖形對稱於 y 軸

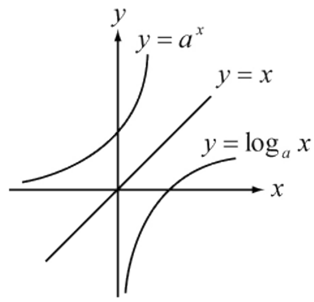
(B) 如右圖，$2=2\times1^2=2^1$

$\Rightarrow y=2x^2$ 和 $y=2^x$ 的圖形相交於兩點



(C) 當 $a>1$，$y=a^x$ 和 $y=\log_a x$ 對稱於 $y=x$ 且皆與 $y=x$ 沒有交點

$\Rightarrow y=a^x$ 和 $y=\log_a x$ 的圖形不會相交



(D) 設 (a,b) 在 $y=3^{-x}$ 上

$\Rightarrow b=3^{-a}$ 且 $b>0$

$\Rightarrow \log_3 b=\log_3(3^{-a})=-a$

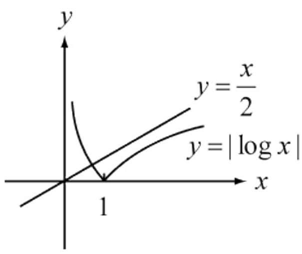
$\Rightarrow a=-\log_3 b$

$\Rightarrow (b,a)$ 必在 $y=-\log_3 x$ 圖形上

$\Rightarrow y=3^{-x}$ 和 $y=-\log_3 x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$

(E) 如右圖

$y=\frac{x}{2}$ 和 $y=|\log x|$ 的圖形相交於一點



故選(A)(B)(C)(D)

11.(A;D)

當 $0<x<1$ 時，關於函數 $f(x)=\log_3 x+\log_x 81$ 的敘述，下列何者正確？

(A) $f(\frac{1}{3})=-5$　(B) $f(\frac{1}{2})$ 爲最小值　(C) $f(\frac{1}{9})$ 爲最小值

(D) $f(x)$ 之最大值爲 -4　(E) $f(x)$ 之最小值爲 4

解析

(A) $f(\frac{1}{3})=\log_3\frac{1}{3}+\log_{\frac{1}{3}}81=\log_3 3^{-1}+\log_{3^{-1}}3^4=-1+(\frac{4}{-1})=-5$

(B)(C)(D)(E)

$f(x)=\log_3 x+\log_x 81=\log_3 x+\log_x 3^4=\log_3 x+4\log_x 3$

當 $0<x<1$ 時，$\log_3 x<0$ 且 $\log_x 3=\frac{1}{\log_3 x}<0$

根據算幾不等式：

$f(x)=\log_3 x+\log_x 3^4=\log_3 x+4\log_x 3=-[(-\log_3 x)+(-4\log_x 3)]$

$\le -2\sqrt{(-\log_3 x)(-4\log_x 3)}=-4$

等式成立時，$-\log_3 x=-4\log_x 3$

$\Rightarrow \log_3 x=\frac{4}{\log_3 x}\Rightarrow(\log_3 x)^2=4$

$\Rightarrow \log_3 x=2$ 或 $-2\Rightarrow x=9$（不合）或 $\frac{1}{9}$

$\therefore$ 當 $x=\frac{1}{9}$ 時，$f(x)$ 有最大值 -4，即 $f(\frac{1}{9})=-4$ 爲最大值

故選(A)(D)

三、選填題

12.(1)

$(\log_{16}625+\log_4 25+\log_{\frac{1}{8}}125)(\log_5 8-\log_{25}16)=$ ① 。

解析

$(\log_{16}625+\log_4 25+\log_{\frac{1}{8}}125)(\log_5 8-\log_{25}16)$

$=(\log_{2^4}5^4+\log_{2^2}5^2+\log_{2^{-3}}5^3)(\log_5 2^3-\log_{5^2}2^4)$

$=(\frac{4}{4}\log_2 5+\frac{2}{2}\log_2 5+\frac{3}{-3}\log_2 5)(3\log_5 2-\frac{4}{2}\log_5 2)$

$=(\log_2 5+\log_2 5-\log_2 5)(3\log_5 2-2\log_5 2)$

$=(\log_2 5)(\log_5 2)$

$=1$

13.(1;8;2)

設實數 x 滿足 $\log_x 8-\log_2 x=2$，求 $x=\frac{①}{②}$ 或 ③ 。

解析

$\log_x 8-\log_2 x=2$

$\Rightarrow \log_x 2^3-\log_2 x=2$

$\Rightarrow 3\log_x 2-\log_2 x=2$

設 $x\neq 1$，令 $\log_2 x=t$，其中 $t\neq 0$，則 $\log_x 2=\dfrac{1}{\log_2 x}=\dfrac{1}{t}$

$\because 3\log_x 2-\log_2 x=2 \quad \therefore 3\cdot\dfrac{1}{t}-t=2$

$\Rightarrow 3-t^2=2t$

$\Rightarrow t^2+2t-3=0$

$\Rightarrow (t+3)(t-1)=0$

$\Rightarrow t=-3$ 或 1

$\Rightarrow \log_2 x=-3$ 或 1

$\Rightarrow x=2^{-3}$ 或 2^1

$\Rightarrow x=\dfrac{1}{8}$ 或 2

14.（5；7）

不等式 $\log_{0.2}(x-5)\geq\log_{0.04}(x-3)$ 之解為 ① $<x\leq$ ② 。

解析

$\log_{0.2}(x-5)\geq\log_{0.04}(x-3)$

$\Rightarrow \log_{0.2}(x-5)\geq\log_{(0.2)^2}(x-3)$

$\Rightarrow \log_{0.2}(x-5)\geq\dfrac{1}{2}\log_{0.2}(x-3)$

$\overset{\times 2}{\Rightarrow} 2\log_{0.2}(x-5)\geq\log_{0.2}(x-3)$

$\Rightarrow \log_{0.2}(x-5)^2\geq\log_{0.2}(x-3)$

$\because 0.2<1 \quad \therefore (x-5)^2\leq(x-3)$

$\Rightarrow x^2-11x-28\leq 0$

$\Rightarrow (x-4)(x-7)\leq 0$

$\Rightarrow 4\leq x\leq 7$ ……①

又 $x-5>0$ 且 $x-3>0$

$\Rightarrow x>5$ ……②

由①、②可知 $5<x\leq 7$

15.（9；4；6）

若 $p=\sqrt[3]{1830\times 0.376}$，試利用下表求出 p 的近似值為 0.①②③。（請算至小數點後第三位）

x	1.83	3.76	8.82	8.83
$\log x$	0.2625	0.5752	0.9455	0.9460

解析

$p=\sqrt[3]{1830\times 0.376}$

$\Rightarrow \log p=\log\sqrt[3]{1830\times 0.376}$

$=\log(1.830\times 10^3\times 3.76\times 10^{-1})^{\frac{1}{3}}$

$=\frac{1}{3}\log(1.830\times 3.76\times 10^2)$

$=\frac{1}{3}(\log 1.830+\log 3.76+\log 10^2)$

$=\frac{1}{3}(0.2625+0.5752+2)$

$=0.9459 ≒ 0.946$

16.(1;6;1)

若$2\le x\le 16$，若$y=x^{4-\log_2 x}$的最大值為M，最小值為m，求數對$(M,m)=$(①② ，③)。

解析

$y=x^{4-\log_2 x}$

$\Rightarrow \log_2 y=\log_2 x^{4-\log_2 x}$

$=(4-\log_2 x)\log_2 x$

$=-[(\log_2 x)^2-4\log_2 x]$

$=-[(\log_2 x)^2-4\log_2 x+4]+4$

$=-(\log_2 x-2)^2+4$

$\because 2\le x\le 16\quad \therefore 1\le \log_2 x\le 4$

當$\log_2 x=2$時，$\log_2 y$有最大值 4

即當$x=4$時，y有最大值$16\Rightarrow M=16$

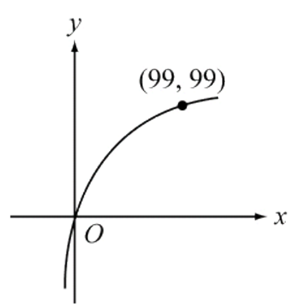
當$\log_2 x=4$時，$\log_2 y$有最小值$-(4-2)^2+4=-2^2+4=0$

即當$x=16$時，y有最小值$1\Rightarrow m=1$

$\therefore (M,m)=(16,1)$

17.(9;9;1)

如右圖，a、b皆為實數，函數$f(x)=a\cdot\log_{100}(x+b)$之圖形經過$(0,0)$、$(99,99)$兩點，試回答以下問題：



數對$(a,b)=$(①② ，③)。

解析

分別將$(0,0)$、$(99,99)$代入$f(x)=a\cdot\log_{100}(x+b)$

$$\Rightarrow\begin{cases}0=a\cdot\log_{100}b \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①\\ 99=a\cdot\log_{100}(99+b) \cdots\cdots ②\end{cases}$$

由②可得$a\neq 0$

由①, $\because a\neq 0$ $\therefore \log_{100}b=0\Rightarrow b=1$

將$b=1$代入②得$99=a\cdot\log_{100}100\Rightarrow a=99$

$\therefore (a,b)=(99,1)$

18.(4;8;5;1)

承上題

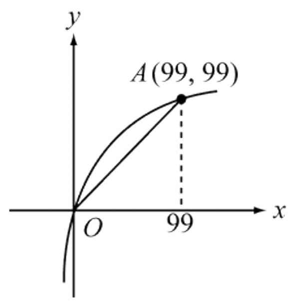
設t為整數，求滿足不等式$f(t)>t$的所有t之總和為 ①②③④ 。

解析

如右圖，$\overline{OA}$在$f(x)$圖形的下方且$\overline{OA}$為$y=x$圖形的一部分

$\therefore$滿足$f(t)>t$的所有整數t為 1、2、3、…、98

$\Rightarrow$所有t的總和為$1+2+3+\cdots+98=\dfrac{98\times(1+98)}{2}=4851$



19.(4;2;7;2)

阿成向利高銀行貸款 300 萬元買房子，銀行貸款年利率 7%，每年複利一次。阿成計畫 10 年還清貸款，在每年年底償還相同的金額。試問每年必須償還 ①②③④00 元。(四捨五入取至百位數)

解析

每年償還x元，則 10 年後還款的本利和為

$$x+x(1+7\%)+x(1+7\%)^2+\cdots+x(1+7\%)^9=\frac{x(1.07^{10}-1)}{0.07}$$

10 年後借款的本利和為$3000000(1+7\%)^{10}=3000000\times1.07^{10}$

$$\Rightarrow\frac{x(1.07^{10}-1)}{0.07}=3000000\times1.07^{10}$$

$$\Rightarrow x=\frac{3000000\times1.07^{10}\times0.07}{1.07^{10}-1}$$

$\log1.07=0.0294$

$\Rightarrow\log1.07^{10}=10\log1.07=10\times0.0294=0.294$

$\Rightarrow\log1.07^{10}=0.294=\log1.967$

$\Rightarrow 1.07^{10}=1.967$

$$\therefore x=\frac{3000000\times1.07^{10}\times0.07}{1.07^{10}-1}\fallingdotseq\frac{3000000\times1.967\times0.07}{1.967-1}\fallingdotseq 427200$$

20.（1;6）

試問1.44^{100}的整數部分是 ①② 位數。

解析

$$\begin{aligned}\log 1.44^{100} &= 100\log 1.44 = 100\log(144\times 10^{-2})\\ &= 100[\log 144 + \log(10^{-2})]\\ &= 100[\log(2^4\times 3^2) - 2]\\ &= 100(4\log 2 + 2\log 3 - 2)\\ &= 100(4\times 0.301 + 2\times 0.4771 - 2)\\ &= 15.82 = 15 + 0.82\end{aligned}$$

故1.44^{100}的整數部分是$15+1=16$位數